

三元一次方程組的解的幾何意義

一、空間中三平面 $\begin{cases} E_1: a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ E_2: a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ E_3: a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$ 之關係如下：

- | | | |
|---|----------------------|--|
| { | 平面 E_1, E_2 重合 | <ol style="list-style-type: none"> 1. 平面E_3與$E_1 (= E_2)$重合 2. 平面E_3與$E_1 (= E_2)$平行 3. 平面E_3與$E_1 (= E_2)$相交於一直線 |
| | 平面 E_1, E_2 平行 | <ol style="list-style-type: none"> 4. 平面E_3與平面E_1, E_2中之一重合 5. 平面E_3與平面E_1及E_2都平行 6. 平面E_3與平面E_1及E_2都相交於一直線 |
| { | 平面 E_1, E_2 相交於一直線 | <ol style="list-style-type: none"> 7. 平面E_3與平面E_1, E_2中之一重合 8. 平面E_3與平面E_1, E_2中之一平行 9. 平面E_3與平面E_1, E_2都相交於一直線, 但三交線不共點 10. 平面E_3與平面E_1, E_2都不重合, 但包含E_1, E_2的交線 11. 平面E_3與平面E_1, E_2的交線相交於一點 |

$$\text{令 } \Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \Delta_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}, \Delta_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

(1) $\Delta \neq 0$ 時, 恰有一解為 $x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, z = \frac{\Delta_z}{\Delta}$

(2) $\Delta = 0$ 時, (A) Δ_x, Δ_y 或 Δ_z 有不為 0 者時, 則無解

(B) $\Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$ 時, 無限多解, 也可能無解

● 練習 ●

1. 試就 a 值討論三平面 $\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ 2x + 5y - 2z = 5 \\ x + 4y - 7z = a \end{cases}$ 之相交情形？

2. 試就 a 值討論三平面 $\begin{cases} x + 3y - z = -4 \\ 2x + 5y + z = -1 \\ x + 5y - 7z = a \end{cases}$ 之相交情形？

3. 試就 a 值討論四平面 $\begin{cases} 3x + 5y - z = -1 \\ x - y + 4z = 11 \\ x + 7y - 9z = -23 \\ 4x + 20y - 23z = a \end{cases}$ 之相交情形？

4. 空間中三平面 $\begin{cases} 2x - 3y + 4z = -3 \\ 2kx + (4k + 3)y - 3kz = -1 \\ 3x + 2ky - z = -2 \end{cases}$

(1) 若此三平面互異且相交於一直線，則 $k = ?$ (2)

(2) 若此三平面互異且兩兩相交於一直線，交線又兩兩平行，則 $k = ?$ ($-\frac{3}{4}$)

5. 若空間中三平面 $\begin{cases} x - y - 2z = 3 \\ 2x + 2y + z = 1 \\ 3x + ky - z = t \end{cases}$ 相交於一直線，則 $k = ?, t = ? = ?$ ($k = 1, t = 4$)

6. 若空間中三平面 $\begin{cases} x - y - z = -2 \\ 2x + y - (k - 2)z = 2 \\ x + (k + 2)y + z = 0 \end{cases}$ 兩兩相交於一直線，則 $k = ?$ (3)

7. 設空間中三平面 $\begin{cases} 3x - y + z = 2 \\ ax - 2y + 3z = -2 \\ 2x + by - z = 2 \end{cases}$ 交於一直線，則：

(1) $a = ?, b = ?$ ($a = -1, b = \frac{1}{2}$)

(2) 若此直線之方向數為 $1, c, d$ ，則 $c = ?, d = ?$ ($c = 10, d = 7$)

8. 已知方程組 $\begin{cases} x + y + 2z = -2 \\ x + 2y + 3z = a \\ x + 3y + 4z = b \\ x + 4y + 5z = b^2 \end{cases}$ 有解，且 a, b 為非整數之常數，則 $a = ?, b = ?$

($a = -\frac{5}{4}, b = -\frac{1}{2}$)