

三次方程式求解公式

【方法一】卡爾丹(Cardano)方法

- 精神：
- 1. 利用綜合除法 \Rightarrow 消去平方項係數
 - 2. 利用立方公式 \Rightarrow 比較係數
 - 3. 利用二次方公式解一根 \Rightarrow 配合 ω ， ω^2 解另兩根

狀況一 $x^3 + px + q = 0$

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

🌀公式(I)：or $\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \omega + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \omega^2$

or $\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \omega^2 + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \omega$

🌀判別式： $D = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} \Rightarrow \begin{cases} D > 0 & \text{一實根兩虛根} \\ D = 0 & \text{至少兩等根} \\ D < 0 & \text{三實根} \end{cases}$

狀況二 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$

🌀公式(II)：

$$x = \frac{1}{3} \sqrt[3]{-\frac{27c - 9ab + 2a^3}{2} + \sqrt{\left(\frac{27c - 9ab + 2a^3}{2}\right)^2 + (3b - a^2)^3}} + \frac{1}{3} \sqrt[3]{-\frac{27c - 9ab + 2a^3}{2} - \sqrt{\left(\frac{27c - 9ab + 2a^3}{2}\right)^2 + (3b - a^2)^3}} - \frac{a}{3}$$

另兩根方法同狀況一

狀況三 $Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$

🌀公式(III)：令 $a = \frac{B}{A}$ ， $b = \frac{C}{A}$ ， $c = \frac{D}{A}$ 代入公式(II)

【證明】：1° 令 $x = u + v$ 代入下式

$$\begin{aligned} \text{兩邊立方} \quad x^3 &= (u + v)^3 = u^3 + v^3 + 3uv(u + v) \\ &= u^3 + v^3 + 3uv(\underline{x}) \end{aligned}$$

移項整理 $x^3 - 3uvx - (u^3 + v^3) = 0$

2° 比較係數 $x^3 + px + q = 0$

得
$$\begin{cases} u \cdot v = -\frac{p}{3} \\ u^3 + v^3 = -q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^3 \cdot v^3 = -\frac{p^3}{27} \\ u^3 + v^3 = -q \end{cases}$$

3° 令 $t^2 + qt - \frac{p^3}{27} = 0$ 兩根為 u^3, v^3

則
$$\begin{cases} u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \\ v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \end{cases}$$

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \text{ or } \left(\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \right) \omega \text{ or } \left(\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \right) \omega^2$$

$$v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \text{ or } \left(\sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \right) \omega \text{ or } \left(\sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \right) \omega^2$$

再配合 $u^3 \cdot v^3 = -\frac{p^3}{27}$ 可得三根

$$x_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

$$x_2 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \omega + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \omega^2$$

$$x_3 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \omega^2 + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \omega$$

《說明例》實地演練：

$$\text{試解 } x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$$

【解】：方法一直接代入公式(II)

方法二利用綜合除法化簡為公式 $x^3 + px + q = 0$ 再代入公式(I)

(以 $(x + \frac{a}{3})$ 表 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow$ 使得平方項係數為0)

$$1^\circ \begin{array}{cccc|c} 1 & -6 & 11 & -6 & \\ & 2 & -8 & 6 & \underline{2} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 3 & \\ & 2 & -4 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & \\ & 2 & -1 \end{array}$$

$$1, 0$$

$\therefore x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x - 2)^3 - (x - 2) = t^3 - t = 0$ 代入公式 (I) 解 t

2° 此時 $\begin{cases} p = -1 \\ q = 0 \end{cases}$, $D = \frac{0^2}{4} + \frac{(-1)^3}{27} < 0$, 故有三實根 t_1, t_2, t_3

$$\Rightarrow \begin{cases} u = \frac{\sqrt[3]{i}}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt[3]{i}}{\sqrt{3}}\omega, \frac{\sqrt[3]{i}}{\sqrt{3}}\omega^2 \\ v = -\frac{\sqrt[3]{i}}{\sqrt{3}}, -\frac{\sqrt[3]{i}}{\sqrt{3}}\omega^2, -\frac{\sqrt[3]{i}}{\sqrt{3}}\omega \end{cases} \left(\text{取 } \omega = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t_1 = \frac{\sqrt[3]{i}}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt[3]{i}}{\sqrt{3}} = 0 \\ t_2 = \frac{\sqrt[3]{i}}{\sqrt{3}}\omega - \frac{\sqrt[3]{i}}{\sqrt{3}}\omega^2 = \frac{\sqrt[3]{i}}{\sqrt{3}}(\omega - \omega^2) = \frac{\sqrt[3]{i}}{\sqrt{3}}(2\omega + 1) = \frac{\sqrt[3]{i}}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{3}i = \sqrt[3]{i} \cdot \sqrt[3]{i^3} = 1 \\ t_3 = \frac{\sqrt[3]{i}}{\sqrt{3}}\omega^2 - \frac{\sqrt[3]{i}}{\sqrt{3}}\omega = \frac{\sqrt[3]{i}}{\sqrt{3}}(\omega^2 - \omega) = -\frac{\sqrt[3]{i}}{\sqrt{3}}(2\omega + 1) = -t_2 = -1 \end{cases}$$

3° 又由關係式 $x - 2 = t$ 故 $x = 1, 2, 3$

四三次方程式求解公式

$$Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = 0$$

$$\text{同除 } A \Rightarrow x^4 + \frac{B}{A}x^3 + \frac{C}{A}x^2 + \frac{D}{A}x + \frac{E}{A} = 0$$

$$\text{即} \Rightarrow x^4 + B'x^3 + C'x^2 + D'x + E' = 0$$

$$\square \text{原則：以 } (x + \frac{B'}{4}) \text{ 表之} \Rightarrow (x + \frac{B'}{4})^4 + p(x + \frac{B'}{4})^2 + q(x + \frac{B'}{4}) + r = 0$$

$$\text{求解} \Rightarrow t^4 + pt^2 + qt + r = 0 \quad \text{四根}$$

$$\text{則 } t_1 - \frac{B'}{4}, t_2 - \frac{B'}{4}, t_3 - \frac{B'}{4}, t_4 - \frac{B'}{4} \quad \text{即得 } x \text{ 的四個根}$$

$$D = 4(p^2 + 12r)^3 - (2p^3 - 72pr + 27q^2)^2$$

$$\text{判别式：} \begin{cases} D > 0 \Rightarrow \text{四實根 or 四虛根} \\ D = 0 \Rightarrow \text{至少兩相等實根} \\ D < 0 \Rightarrow \text{兩實根兩虛根} \end{cases}$$

【方法一】尤拉(Euler)方法

$$\text{解 } x^4 + px^2 + qx + r = 0$$

$$\square \text{精神：} \begin{cases} 1. \text{利用四次方公式及 } 2x = u + v + w \Rightarrow \text{比較係數} \\ 2. \text{利用三次方公式解係數方程式}(u^2, v^2, w^2 \text{ 的值}) \\ 3. \text{再帶回 } x = \frac{u + v + w}{2} \text{ 求解四次方乘式四個根} \end{cases}$$

【解】：1° 設 $2x = u + v + w$

平方 $4x^2 = (u^2 + v^2 + w^2) + 2(uv + vw + wu)$

移項再平方 $(4x^2 - (u^2 + v^2 + w^2))^2 = (2(uv + vw + wu))^2$

$16x^4 - 8x^2(u^2 + v^2 + w^2) + (u^2 + v^2 + w^2)^2 = 4(u^2v^2 + v^2w^2 + w^2u^2) + 8uvw(u+v+w)$

$16x^4 - 8x^2(u^2 + v^2 + w^2) + (u^2 + v^2 + w^2)^2 = 4(u^2v^2 + v^2w^2 + w^2u^2) + 8uvw(\underline{2x})$

$x^4 - \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2)x^2 - (uvw)x + \frac{1}{16}[u^4 + v^4 + w^4 - 2(u^2v^2 + v^2w^2 + w^2u^2)] = 0$

$x^4 + p \cdot x^2 + q \cdot x + r = 0$

2° 比較係數 $\therefore \begin{cases} p = -\frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) \\ q = -uvw \\ r = \frac{1}{16}[u^4 + v^4 + w^4 - 2(u^2v^2 + v^2w^2 + w^2u^2)] \end{cases}$

3° 可解出 $\begin{cases} u^2 + v^2 + w^2 = -2p \\ u^2v^2 + v^2w^2 + w^2u^2 = p^2 - 4r \\ u^2v^2w^2 = q^2 \end{cases}$

利用三次方根與係數知

4° 此時 u^2, v^2, w^2 爲 $z^3 + \underline{2p} \cdot z^2 + \underline{(p^2 - 4r)} \cdot z - \underline{q^2} = 0$ 之三根

令 $\begin{cases} a = 2p \\ b = p^2 - 4r \\ c = -q^2 \end{cases}$ 代入公式(II) 解出 u^2, v^2, w^2 後

5° 得 $\begin{cases} x = \frac{1}{2}(u + v + w) \\ \text{or } \frac{1}{2}(u - v - w) \\ \text{or } \frac{1}{2}(-u + v - w) \\ \text{or } \frac{1}{2}(-u - v + w) \end{cases}$

【方法二】笛卡爾(Descartes)方法

解 $x^4 + px^2 + qx + r = 0$

□精神：

- 1. 強迫分解出四次式為兩個二次式乘積
- 2. 利用比較係數解出 k 、 l 、 m 三者關係式(為三次式)
- 3. 利用公式(II)解出 k (及 l 、 m)
- 4. 將結果代入兩個二次式中解出四個根

【證明】：1° 設 $x^4 + px^2 + qx + r = (x^2 + kx + l) \cdot (x^2 - kx + m) = 0 \cdots (1)$

$$\text{乘開比較係數：} \begin{cases} m + l - k^2 = p \cdots (2) \\ k \cdot (m - l) = q \cdots (3) \\ l \cdot m = r \cdots (4) \end{cases}$$

由(2)、(3)解出 $(m, l) = \left(\frac{q + pk + k^3}{2k}, \frac{-q + pk + k^3}{2k} \right) \cdots (5)$ 代入(4)

$$2^\circ \frac{q + pk + k^3}{2k} \times \frac{-q + pk + k^3}{2k} = \frac{(k^3 + pk)^2 - q^2}{4k^2} = r$$

$$\Rightarrow (k^2)^3 + 2p(k^2)^2 + (p^2 - 4r)(k^2) - q^2 = 0$$

$$\Rightarrow k^2 = z \cdots (6)$$

$\Rightarrow k^2$ 為 $z^3 + 2p \cdot z^2 + (p^2 - 4r) \cdot z - q^2 = 0$ 之一根

代入公式(II)可得三根 z_1, z_2, z_3

3° 利用(5)及(6)解出 k, l, m 再代回(1)式

利用二次方公式解解出

所得即為四次方程式之解

【方法三】費拉里(Ferrari)方法

解 $x^4 + px^2 + qx + r = 0$

□精神：

- 1. 同加 $x^2y + \frac{y^2}{4}$ 強迫分解出四次式為兩個多項式的平方差
- 2. 利用比較係數解出 y 的三次式
- 3. 利用公式(II)解出 y
- 4. 將 y 代入二次式中解出四個根

【證明】：1° $x^4 + px^2 + qx + r = 0 \Rightarrow x^4 = -px^2 - qx - r$

兩邊同加 $x^2y + \frac{y^2}{4} \Rightarrow x^4 + (x^2y + \frac{y^2}{4}) = -px^2 - qx - r + (x^2y + \frac{y^2}{4})$

兩邊配方 $(x^2 + \frac{y}{2})^2 = (y - p)x^2 - qx + (\frac{y^2}{4} - r) \dots (1)$

∴ 是完全平方 ∴ 必是完全平方

2° 故判別式 = $D = (-q)^2 - 4(y - p) \cdot (\frac{y^2}{4} - r) = 0$

展開得 $y^3 - p \cdot y^2 - 4r \cdot y + (4pr - q^2) = 0$

代入公式(II) 得三根 y_1, y_2, y_3 ($y \neq p$)

3° ∴ (1)式可整理得 $(x^2 + \frac{y}{2})^2 = (y - p) \left[x - \frac{q}{2(y - p)} \right]^2 \dots (2)$

$$x^2 + \frac{y}{2} = \pm \sqrt{(y - p)} \cdot \left[x - \frac{q}{2(y - p)} \right]$$

4° 將 y_1, y_2, y_3 上式結果代入 $x^2 \mp \sqrt{(y - p)} x + (\frac{y}{2} \pm \frac{q}{2\sqrt{(y - p)}}) = 0$

並利用二次方程式公式解解 x ，

所得即為 $x^4 + px^2 + qx + r = 0$ 四次方程式之解

..... 結束(over)