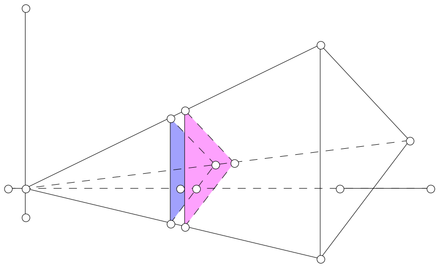
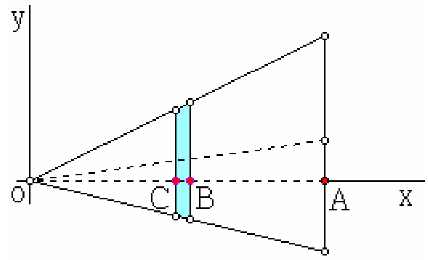
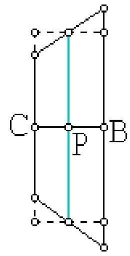
三角錐(四面體)的體積

問：爲何三角錐的體積爲（$\frac{1}{3}$底面積×高）？







解：

將三角錐頂點至於原點，且底面垂直於 x 軸

將高 OA 分成 n 等分，C 與 B 之間爲第 k 等分

令 OA 長 h，則 OC 長爲$\frac{k-1}{n}h$，OB 長爲$\frac{k}{n}h$，且令底面積爲 M

令 P 爲 CB 中點，則 OP 長爲$\frac{k-1}{n}h+\frac{k}{n}h$之半，即$\frac{(2k-1)h}{2n}$

三角錐在 P 點的截面與底面相似，故面積爲長度的平方比

令 P 點處的截面積爲 m，則$\frac{m}{M}=\frac{\overline{OP}^2}{\overline{OA}^2}=\frac{(\frac{(2k-1)h}{2n})^2}{h^2}$

所以$m=\frac{(2k-1)^2}{4n^2}M$

將 P 點處的截面積乘以$\overline{CB}$長即爲 n 等分中第 k 等分的體積

所以第 k 等分的體積爲$\frac{(2k-1)^2}{4n^2}M\times\frac{h}{n}$

所以三角錐的體積爲$\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(2k-1)^2}{4n^2}M\times\frac{h}{n}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{Mh}{4n^3}\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{Mh}{4n^3}\sum_{k=1}^{n}(4k^2-4k+1)$$

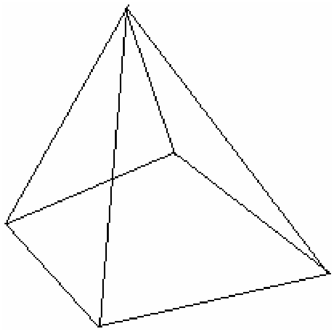
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{Mh}{4n^3}(4\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-4\times\frac{n(n+1)}{2}+n)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{Mh}{4n^3}(\frac{4n^3-n}{3})$$

$$=\lim_{n\to\infty}(\frac{Mh}{4n^3}\times\frac{4n^3}{3}-\frac{Mh}{4n^3}\times\frac{n}{3})$$

$$=\lim_{n\to\infty}(\frac{Mh}{3}-\frac{Mh}{12n^2})$$

$$=\frac{Mh}{3}$$



所以，三角錐的體積爲（$\frac{1}{3}$底面積×高）

問題：四角錐的體積又爲何？