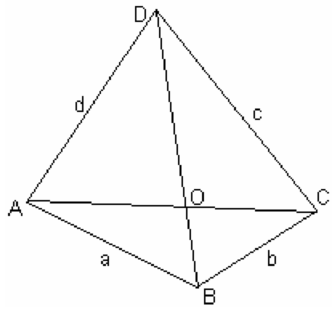
任 意 四 邊 形 面 積



如右圖四邊形 ABCD，設 $p=\frac{1}{2}(a+b+c+d)$，$\angle A+\angle C=2\theta$，則

四邊形面積 $S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)-abcd\cos^2\theta}$

證明：

四邊形 ABCD 面積=△ABD 面積+△BCD 面積

$S=\frac{1}{2}ad\sin A+\frac{1}{2}bc\sin C$，即 $4S^2=(ad\sin A+bc\sin C)^2$ ……….(1)

由餘弦定理，△ABD 中 $\overline{BD}^2=a^2+d^2-2ad\cos A$

△BCD 中 $\overline{BD}^2=b^2+c^2-2bc\cos C$

所以 $a^2+d^2-2ad\cos A=b^2+c^2-2bc\cos C$，則

$\frac{1}{2}(a^2+d^2-b^2-c^2)=ad\cos A-bc\cos C$ ……….(2)

由(1)與(2)，$4S^2+\frac{1}{4}(a^2+d^2-b^2-c^2)^2=(ad\sin A+bc\sin C)^2+(ad\cos A-bc\cos C)^2$

$=a^2d^2+b^2c^2+2abcd\sin A\sin C-2abcd\cos A\cos C$

$=a^2d^2+b^2c^2-2abcd(\cos A\cos C-\sin A\sin C)$

$=a^2d^2+b^2c^2-2abcd\cos(A+C)$

$=a^2d^2+b^2c^2-2abcd\cos 2\theta$

$=a^2d^2+b^2c^2-2abcd(2\cos^2\theta-1)$

$=a^2d^2+2abcd+b^2c^2-4abcd\cos^2\theta$

$=(ad+bc)^2-4abcd\cos^2\theta$

所以

$4S^2+\frac{1}{4}(a^2+d^2-b^2-c^2)^2=(ad+bc)^2-4abcd\cos^2\theta$

$16S^2=(2ad+2bc)^2-(a^2+d^2-b^2-c^2)^2-16abcd\cos^2\theta$

$=(2ad+2bc+a^2+d^2-b^2-c^2)(2ad+2bc-a^2-d^2+b^2+c^2)-16abcd\cos^2\theta$

$=[(a+d)^2-(b-c)^2][(b+c)^2-(a-d)^2]-16abcd\cos^2\theta$

$=(a+d+b-c)(a+d-b+c)(b+c+a-d)(b+c-a+d)-16abcd\cos^2\theta$

$=(2p-2c)(2p-2b)(2p-2d)(2p-2a)-16abcd\cos^2\theta$

$=16(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)-16abcd\cos^2\theta$

則 $S^2=(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)-abcd\cos^2\theta$

即 $S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)-abcd\cos^2\theta}$

問題 1：如果四邊形 ABCD 為一圓內接四邊形，則公式會變成如何？

問題 2：如果四邊形 ABCD 退化成一三角形，則公式會變成如何？