

## 任意四邊形面積

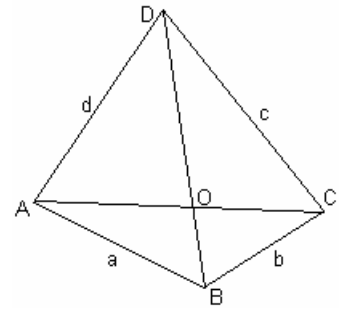
如右圖四邊形 ABCD，設  $p = \frac{1}{2}(a+b+c+d)$ ， $\angle A + \angle C = 2\theta$ ，則

$$\text{四邊形面積 } S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - abcd \cos^2 \theta}$$

**證明：**

四邊形 ABCD 面積 =  $\triangle ABD$  面積 +  $\triangle BCD$  面積

$$S = \frac{1}{2}ad \sin A + \frac{1}{2}bc \sin C, \text{ 即 } 4S^2 = (ad \sin A + bc \sin C)^2 \dots\dots\dots(1)$$



由餘弦定理， $\triangle ABD$  中  $\overline{BD}^2 = a^2 + d^2 - 2ad \cos A$

$$\triangle BCD \text{ 中 } \overline{BD}^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos C$$

所以  $a^2 + d^2 - 2ad \cos A = b^2 + c^2 - 2bc \cos C$ ，則

$$\frac{1}{2}(a^2 + d^2 - b^2 - c^2) = ad \cos A - bc \cos C \dots\dots\dots(2)$$

$$\text{由(1)與(2), } 4S^2 + \frac{1}{4}(a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2 = (ad \sin A + bc \sin C)^2 + (ad \cos A - bc \cos C)^2$$

$$= a^2d^2 + b^2c^2 + 2abcd \sin A \sin C - 2abcd \cos A \cos C$$

$$= a^2d^2 + b^2c^2 - 2abcd(\cos A \cos C - \sin A \sin C)$$

$$= a^2d^2 + b^2c^2 - 2abcd \cos(A+C)$$

$$= a^2d^2 + b^2c^2 - 2abcd \cos 2\theta$$

$$= a^2d^2 + b^2c^2 - 2abcd(2\cos^2 \theta - 1)$$

$$= a^2d^2 + 2abcd + b^2c^2 - 4abcd \cos^2 \theta$$

$$= (ad + bc)^2 - 4abcd \cos^2 \theta$$

所以

$$4S^2 + \frac{1}{4}(a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2 = (ad + bc)^2 - 4abcd \cos^2 \theta$$

$$16S^2 = (2ad + 2bc)^2 - (a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2 - 16abcd \cos^2 \theta$$

$$= (2ad + 2bc + a^2 + d^2 - b^2 - c^2)(2ad + 2bc - a^2 - d^2 + b^2 + c^2) - 16abcd \cos^2 \theta$$

$$= [(a+d)^2 - (b-c)^2][(b+c)^2 - (a-d)^2] - 16abcd \cos^2 \theta$$

$$= (a+d+b-c)(a+d-b+c)(b+c+a-d)(b+c-a+d) - 16abcd \cos^2 \theta$$

$$= (2p-2c)(2p-2b)(2p-2d)(2p-2a) - 16abcd \cos^2 \theta$$

$$= 16(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - 16abcd \cos^2 \theta$$

$$\text{則 } S^2 = (p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - abcd \cos^2 \theta$$

$$\text{即 } S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - abcd \cos^2 \theta}$$

**問題 1：**如果四邊形 ABCD 為一圓內接四邊形，則公式會變成如何？

**問題 2：**如果四邊形 ABCD 退化成一三角形，則公式會變成如何？