

定義 1 : $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$

定義 2 : $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$

定義 3 : $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) = a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k}$, 其中 $\begin{cases} \vec{i} = (1, 0, 0) \\ \vec{j} = (0, 1, 0) \\ \vec{k} = (0, 0, 1) \end{cases}$

定義 4 : $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, 則

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \\ &= (a_2 b_3 - a_3 b_2)(1, 0, 0) - (a_1 b_3 - a_3 b_1)(0, 1, 0) + (a_1 b_2 - a_2 b_1)(0, 0, 1) \\ &= (a_2 b_3 - a_3 b_2, -(a_1 b_3 - a_3 b_1), a_1 b_2 - a_2 b_1) \\ &= (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1) \end{aligned}$$

定理 1 : $\vec{a} \times \vec{0} = \vec{0} \times \vec{a} = \vec{0}$

定理 2 : \vec{a} 與 \vec{b} 為非零向量 , 則 $\vec{a} \perp (\vec{a} \times \vec{b})$ 且 $\vec{b} \perp (\vec{a} \times \vec{b})$

證明 : $\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = (a_1, a_2, a_3) \cdot (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1)$
 $= (a_1 a_2 b_3 - a_1 a_3 b_2 + a_2 a_3 b_1 - a_1 a_2 b_3 + a_1 a_3 b_2 - a_2 a_3 b_1)$
 $= (0, 0, 0)$

定理 3 : $\vec{a} \parallel \vec{b}$, 則 $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$

定理 4 : \vec{a} 與 \vec{b} 為非零向量 , 則 $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

定理 5 : \vec{a} 與 \vec{b} 為非零向量 , 其夾角為 θ , 則 $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta$

證明 : $|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \left(-\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}\right)^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2$
 $= (a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2$
 $= (a_2^2 b_3^2 - 2a_2 a_3 b_2 b_3 + a_3^2 b_2^2 + a_3^2 b_1^2 - 2a_1 a_3 b_1 b_3 + a_1^2 b_3^2 + a_1^2 b_2^2 - 2a_1 a_2 b_1 b_2 + a_2^2 b_1^2)$
 $= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2$
 $= |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$
 $= |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \theta)^2$
 $= |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 (1 - \cos^2 \theta)$
 $= |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 \sin^2 \theta$

所以 $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta$

定理 6 : \vec{a} 、 \vec{b} 與 \vec{c} 為非零向量 , 則 $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$ 且

$|(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}| = |\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})|$ 為由 \vec{a} 、 \vec{b} 與 \vec{c} 向量拓展成的平行六面體體積