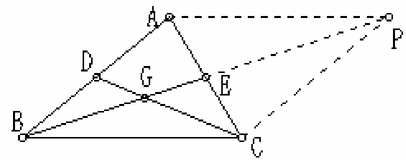
第一章　向量幾何

第一節向量的組合與分解

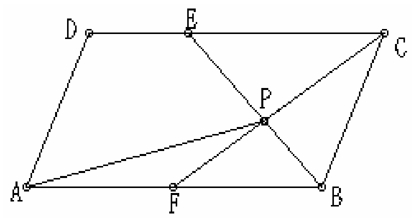
例1:　若 $\overline{BE}$ 與 $\overline{CD}$ 分別為 ΔABC 之 $\overline{AC}$ 與 $\overline{AB}$ 邊上的中線，$\overline{BE}$ 與 $\overline{CD}$ 相交於 G，試證：$\overline{BG}=\frac{2}{3}\overline{BE}$，$\overline{CG}=\frac{2}{3}\overline{CD}$



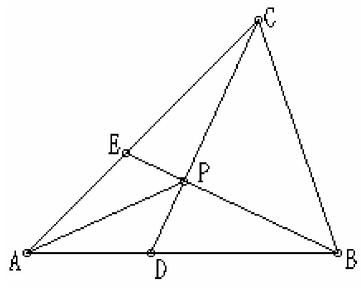
例2:　A,B,C 三點共線　<==>　$\exists \alpha,\beta\in R$，且 $\alpha+\beta=1$，$\ni \overrightarrow{OC}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}$

例3:　ΔABC，P 在 $\overline{BC}$ 邊上，且 $\overline{PB}:\overline{PC}=2:3$，試證：$\overrightarrow{AP}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$

例4:　如右圖，點 E 在平行四邊形 $ABCD$ 之 $\overline{CD}$ 邊上，且 $\overline{DE}=\frac{1}{3}\overline{DC}$，點 F 為 $\overline{AB}$ 邊上的中點，$\overline{BE}$ 與 $\overline{CF}$ 交於 P 點，若 $\overrightarrow{AP}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AD}$，則 $\alpha=?,\beta=?$（$\alpha=\frac{5}{7},\beta=\frac{3}{7}$）

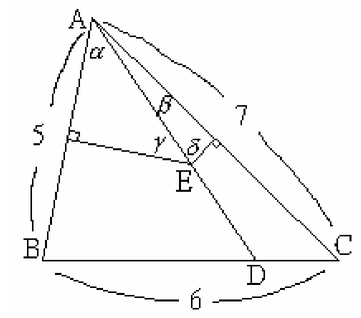


例5:　如右圖，D 與 E 分別在 ΔABC 之 $\overline{AB}$ 與 $\overline{AC}$ 邊上，且 $\overline{AD}:\overline{DB}=2:3$，$\overline{AE}:\overline{EC}=3:4$，$\overline{BE}$ 與 $\overline{CD}$ 交於 P 點，若 $\overrightarrow{AP}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$，則 $\alpha=?,\beta=?$（$\alpha=\frac{8}{29},\beta=\frac{9}{29}$）



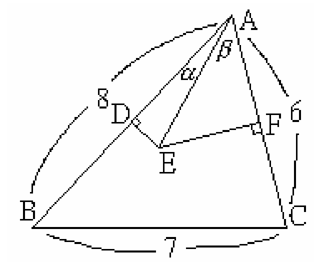
例6:　在 ΔABC 中，$\overline{AB}=5$，$\overline{BC}=6$，$\overline{CA}=7$，E 為 ΔABC 之外心，直線 $\overleftrightarrow{AE}$ 交 $\overleftrightarrow{BC}$ 於 D，若 $\overrightarrow{AD}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$，則 $\alpha=?,\beta=?$

（$\alpha=\dfrac{49}{174},\beta=\dfrac{125}{174}$）



例7:　如圖，在 ΔABC 中，E 為 ΔABC 之外心，且 $\overline{AB}=8$，$\overline{BC}=7$，$\overline{CA}=6$，若 $\overrightarrow{AE}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$，則 $\alpha=?,\beta=?$

（$\alpha=\dfrac{44}{105},y=\dfrac{64}{315}$）



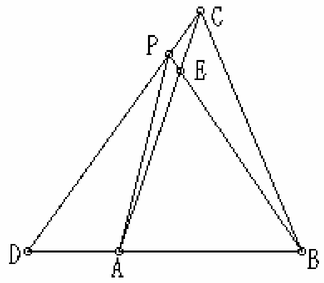
例8:　設 $\bar{a}=\overrightarrow{TA}$ 及 $\bar{b}=\overrightarrow{TB}$ 為任意兩個非零、非平行向量，若 $\bar{c}$ 表 T,A,B 三點所決定的平面上的任一向量。試證：$\bar{c}$ 可用 $\bar{a}$ 及 $\bar{b}$ 的線性組合來表示，亦即 $\exists m,n\in R$，$\ni \bar{c}=m\bar{a}+n\bar{b}$；同時這組實數 m,n 僅有唯一解

例9:　G 為 ΔABC 之重心，E 在 $\overline{AB}$ 邊上且 $\overline{AE}:\overline{EB}=4:3$，$F$ 在 $\overline{AC}$ 邊上且 $\overline{AF}:\overline{FC}=4:1$，試證 E,G,F 三點共線

例10:　$A(-1,0),B(01),C(1,1)$，若 $\overrightarrow{OC}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}$，$\alpha+\beta=2$，則（例 2）可知哪三點共線？

例11: 點E在平行四邊形$ABCD$之$\overline{AD}$邊上，$\overline{AE}=2\overline{ED}$，點$F$在$\overline{AB}$邊上，$\overline{AF}=3\overline{FB}$，若$\overline{BE}$與$\overline{DF}$交於$P$點，且$\overrightarrow{AP}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AD}$，則$\alpha=?,\beta=?$

例12: 如右圖，$\overline{AD}=\frac{1}{2}\overline{AB}$，$\overline{AE}=\frac{3}{4}\overline{AC}$，直線$\overleftrightarrow{BE}$交直線$\overleftrightarrow{CD}$於$P$點，若$\overrightarrow{AP}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$，則$\alpha=?,\beta=?$



例13: 設點H為ΔABC之垂心，若$\overline{AB}=4$，$\overline{BC}=5$，$\overline{CA}=6$，且$\overrightarrow{AH}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$，則$\alpha=?,\beta=?$

第二節向量在平面幾何上的應用

例1:　試證三角形兩邊中點連線段平行且等於第三邊之半長

例2:　在 ΔABC , ΔDEF 中，若 $\overrightarrow{OD}=2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$ ，
$\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$ ，$\overrightarrow{OF}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OC}$ ，試證：$\Delta ABC \cong \Delta DEF$

例3:　ΔABC 中， D,E,F 三點分別在 $\overline{BC},\overline{CA},\overline{AB}$ 邊上，且
$\overline{BD}:\overline{CD}=\overline{CE}:\overline{EA}=\overline{AF}:\overline{FB}$ ，試證：ΔABC 的重心與 ΔDEF 的重心重合

例4:　試證：若三角形有兩中線等長，則此三角形為等腰三角形

例5:　試證：等腰三角形頂點至底邊中點的連線垂直於底邊

例6:　試證：半圓所對之圓周角為一直角

例7:　試證：三角形的三高共點

例8:　設 $\overline{AD}$ 為 ΔABC 中 $\overline{BC}$ 邊上的中線，試證：

$$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2\overline{AD}^2+\frac{1}{2}\overline{BC}^2$$

例9:　試證：平行四邊形之對角線互相垂直 <==> 此四邊形為一菱形

例10: 試證：三角形的三邊之中垂線共點

例11: 試證：三角形的三內角平分線共點

例12: 試證：三角形的三邊之中線共點