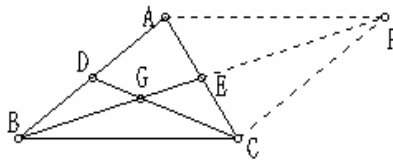


# 第一章 向量幾何

## 第一節 向量的組合與分解

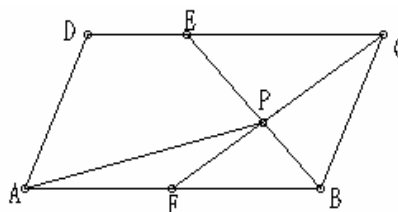
例1: 若  $\overline{BE}$  與  $\overline{CD}$  分別為  $\triangle ABC$  之  $\overline{AC}$  與  $\overline{AB}$  邊上的中線， $\overline{BE}$  與  $\overline{CD}$  相交於  $G$ ，試證： $\overline{BG} = \frac{2}{3}\overline{BE}$ ， $\overline{CG} = \frac{2}{3}\overline{CD}$



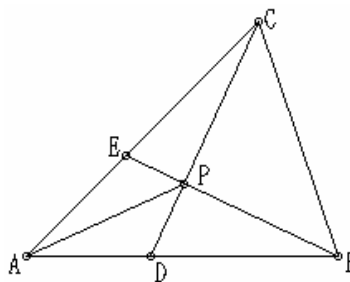
例2:  $A, B, C$  三點共線  $\iff \exists \alpha, \beta \in R$ ，且  $\alpha + \beta = 1$ ， $\Rightarrow \overline{OC} = \alpha\overline{OA} + \beta\overline{OB}$

例3:  $\triangle ABC$ ， $P$  在  $\overline{BC}$  邊上，且  $\overline{PB}:\overline{PC} = 2:3$ ，試證： $\overline{AP} = \frac{3}{5}\overline{AB} + \frac{2}{5}\overline{AC}$

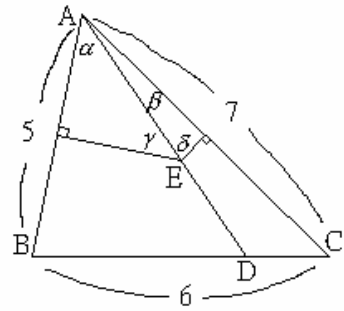
例4: 如右圖，點  $E$  在平行四邊形  $ABCD$  之  $\overline{CD}$  邊上，且  $\overline{DE} = \frac{1}{3}\overline{DC}$ ，點  $F$  為  $\overline{AB}$  邊上的中點， $\overline{BE}$  與  $\overline{CF}$  交於  $P$  點，若  $\overline{AP} = \alpha\overline{AB} + \beta\overline{AD}$ ，則  $\alpha = ?$ ， $\beta = ?$  ( $\alpha = \frac{5}{7}$ ， $\beta = \frac{3}{7}$ )



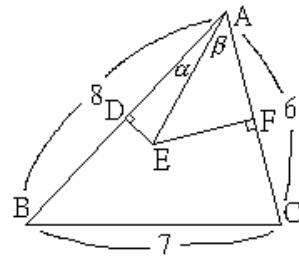
例5: 如右圖， $D$  與  $E$  分別在  $\triangle ABC$  之  $\overline{AB}$  與  $\overline{AC}$  邊上，且  $\overline{AD}:\overline{DB} = 2:3$ ， $\overline{AE}:\overline{EC} = 3:4$ ， $\overline{BE}$  與  $\overline{CD}$  交於  $P$  點，若  $\overline{AP} = \alpha\overline{AB} + \beta\overline{AC}$ ，則  $\alpha = ?$ ， $\beta = ?$  ( $\alpha = \frac{8}{29}$ ， $\beta = \frac{9}{29}$ )



例6: 在  $\triangle ABC$  中,  $\overline{AB}=5$ ,  $\overline{BC}=6$ ,  $\overline{CA}=7$ ,  
 $E$  為  $\triangle ABC$  之外心, 直線  $\overline{AE}$  交  $\overline{BC}$  於  
 $D$ , 若  $\overline{AD}=\alpha\overline{AB}+\beta\overline{AC}$ , 則  $\alpha=?$ ,  $\beta=?$   
 $(\alpha=\frac{49}{174}, \beta=\frac{125}{174})$



例7: 如圖, 在  $\triangle ABC$  中,  $E$  為  $\triangle ABC$  之外心,  
 且  $\overline{AB}=8$ ,  $\overline{BC}=7$ ,  $\overline{CA}=6$ , 若  
 $\overline{AE}=\alpha\overline{AB}+\beta\overline{AC}$ , 則  $\alpha=?$ ,  $\beta=?$   
 $(\alpha=\frac{44}{105}, \beta=\frac{64}{315})$



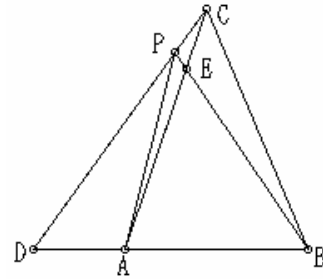
例8: 設  $\vec{a}=\overline{TA}$  及  $\vec{b}=\overline{TB}$  為任意兩個非零、非平行向量, 若  $\vec{c}$  表  $T, A, B$   
 三點所決定的平面上的任一向量。試證:  $\vec{c}$  可用  $\vec{a}$  及  $\vec{b}$  的線性  
 組合來表示, 亦即  $\exists m, n \in R, \exists \vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$ ; 同時這組實數  $m, n$   
 僅有唯一解

例9:  $G$  為  $\triangle ABC$  之重心,  $E$  在  $\overline{AB}$  邊上且  $\overline{AE}:\overline{EB}=4:3$ ,  $F$  在  $\overline{AC}$  邊上  
 且  $\overline{AF}:\overline{FC}=4:1$ , 試證  $E, G, F$  三點共線

例10:  $A(-1,0), B(0,1), C(1,1)$ , 若  $\overline{OC}=\alpha\overline{OA}+\beta\overline{OB}$ ,  $\alpha+\beta=2$ , 則 (例 2)  
 可知哪三點共線?

例11: 點  $E$  在平行四邊形  $ABCD$  之  $\overline{AD}$  邊上,  $\overline{AE} = 2\overline{ED}$ , 點  $F$  在  $\overline{AB}$  邊上,  $\overline{AF} = 3\overline{FB}$ , 若  $\overline{BE}$  與  $\overline{DF}$  交於  $P$  點, 且  $\overrightarrow{AP} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AD}$ , 則  $\alpha = ?, \beta = ?$

例12: 如右圖,  $\overline{AD} = \frac{1}{2}\overline{AB}$ ,  $\overline{AE} = \frac{3}{4}\overline{AC}$ , 直線  $\overline{BE}$  交直線  $\overline{CD}$  於  $P$  點, 若  $\overrightarrow{AP} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$ , 則  $\alpha = ?, \beta = ?$



例13: 設點  $H$  為  $\triangle ABC$  之垂心, 若  $\overline{AB} = 4$ ,  $\overline{BC} = 5$ ,  $\overline{CA} = 6$ , 且  $\overrightarrow{AH} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$ , 則  $\alpha = ?, \beta = ?$



## 第二節 向量在平面幾何上的應用

例1: 試證三角形兩邊中點連線段平行且等於第三邊之半長



例2: 在  $\triangle ABC, \triangle DEF$  中，若  $\overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ ，  
 $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ ， $\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC}$ ，試證： $\triangle ABC \cong \triangle DEF$

例3:  $\triangle ABC$  中， $D, E, F$  三點分別在  $\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AB}$  邊上，且  
 $\overline{BD} : \overline{CD} = \overline{CE} : \overline{EA} = \overline{AF} : \overline{FB}$ ，試證： $\triangle ABC$  的重心與  $\triangle DEF$  的重心  
重合

例4: 試證：若三角形有兩中線等長，則此三角形為等腰三角形

例5: 試證：等腰三角形頂點至底邊中點的連線垂直於底邊

例6: 試證：半圓所對之圓周角為一直角

例7: 試證：三角形的三高共點

例8: 設  $\overline{AD}$  為  $\triangle ABC$  中  $\overline{BC}$  邊上的中線，試證：

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2\overline{AD}^2 + \frac{1}{2}\overline{BC}^2$$

例9: 試證：平行四邊形之對角線互相垂直  $\iff$  此四邊形為一菱形

例10: 試證：三角形的三邊之中垂線共點

例11: 試證：三角形的三內角平分線共點

例12: 試證：三角形的三邊之中線共點

