

根與係數

定理 1： α 與 β 為二次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ 之二根，則

$$\begin{cases} \alpha + \beta = \frac{-b}{a} \\ \alpha\beta = \frac{c}{a} \end{cases}$$

定理 2： α 、 β 與 γ 為三次方程式 $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ 之三根，則

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = \frac{-b}{a} \\ \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a} \\ \alpha\beta\gamma = \frac{-d}{a} \end{cases}$$

定理 3：設 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ 為 n 次方程式 $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$ 之 n 個根，則

$$\begin{cases} \text{各根和} = \frac{-a_{n-1}}{a_n} \\ \text{各根兩兩乘積和} = \frac{a_{n-2}}{a_n} \\ \text{各根三三乘積和} = \frac{-a_{n-3}}{a_n} \\ \dots\dots \\ \text{各根乘積和} = (-1)^n \frac{a_0}{a_n} \end{cases}$$

練習 1： a, b 為 $x^2 + 2x - 1 = 0$ 之二根，試求下列各值

- (1) $a + b$
- (2) ab
- (3) $a - b$
- (4) $a^2 + b^2$
- (5) $a^3 + b^3$
- (6) $a^9 + b^9$
- (7) $ab^2 + a^2b$
- (8) $ab^5 + a^5b$
- (9) $\frac{2}{a} + \frac{2}{b}$
- (10) $\frac{b^2}{a} + \frac{a^2}{b}$
- (11) $\sqrt{a} + \sqrt{b}$
- (12) 以 $a^2 - 2$ 與 $b^2 - 2$ 為二根的一元二次方程式為何