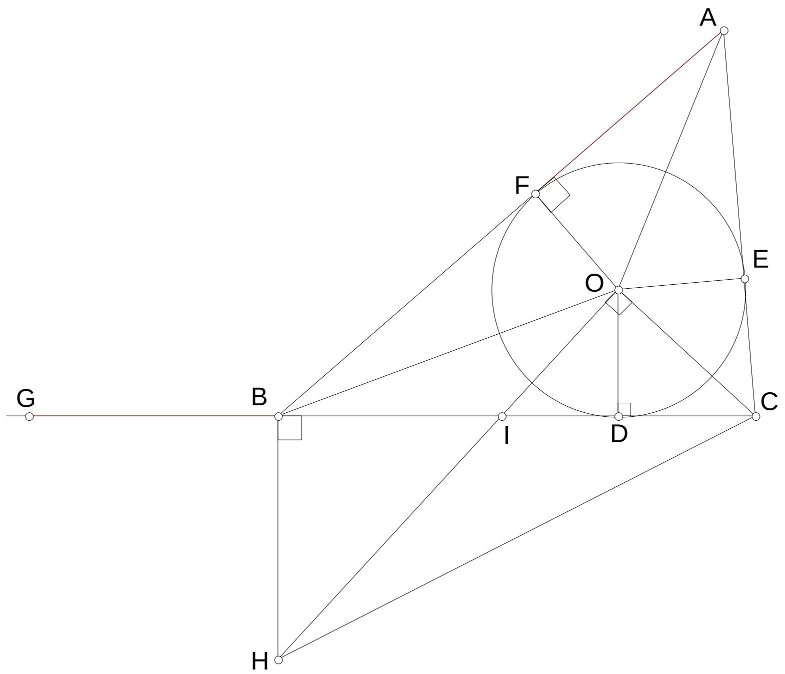
三角形 ABC，$\overline{AB}=c,\overline{BC}=a,\overline{CA}=b$ 其面積爲 $\sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}$ ，其中

$S=\frac{1}{2}(a+b+c)$



證明：

1. 如圖，在 $\overrightarrow{CB}$ 上取一點 G ，使得 $\overline{BG}=\overline{AF}$

2. 過 B 作 $\overline{BC}$ 的垂線，過 O 作 $\overline{OC}$ 的垂線，兩線交於 H

3. $BOCH$ 四點共圓（都在以 $\overline{HC}$ 爲直徑的圓上），$\angle BHC+\angle BOC=180°$

4. 又因 $\angle FOB+\angle BOC=180°$ ，所以 $\angle BHC=\angle FOA$ ，所以 $\Delta AFO\sim\Delta CBH$ ，
$\frac{\overline{BC}}{\overline{BH}}=\frac{\overline{AF}}{\overline{FO}}=\frac{\overline{BG}}{\overline{OD}}$ 即 $\frac{\overline{BC}}{\overline{BG}}=\frac{\overline{BH}}{\overline{OD}}$ ，則 $\frac{\overline{BC}+\overline{BG}}{\overline{BG}}=\frac{\overline{BH}+\overline{OD}}{\overline{OD}}$

5. 因 $\Delta BIH\sim\Delta DIO$ ，所以 $\frac{\overline{BH}}{\overline{OD}}=\frac{\overline{BI}}{\overline{ID}}$ ，則 $\frac{\overline{BH}+\overline{OD}}{\overline{OD}}=\frac{\overline{BI}+\overline{ID}}{\overline{ID}}=\frac{\overline{BD}}{\overline{ID}}$

6. ΔOIC 中，$\overline{ID}\times\overline{DC}=\overline{OD}^2$

7. 由 4,5,6 可得 $\frac{\overline{BC}+\overline{BG}}{\overline{BG}}=\frac{\overline{GC}}{\overline{BG}}=\frac{\overline{BH}+\overline{OD}}{\overline{OD}}=\frac{\overline{BD}}{\overline{ID}}=\frac{\overline{BD}\times\overline{DC}}{\overline{ID}\times\overline{DC}}=\frac{\overline{BD}\times\overline{DC}}{\overline{OD}^2}$ ，則

$\frac{\overline{GC}}{\overline{BG}}\times\frac{\overline{GC}}{\overline{GC}}=\frac{\overline{BD}\times\overline{DC}}{\overline{OD}^2}$ ，$(\overline{GC}\times\overline{OD})^2=\overline{GC}\times\overline{BG}\times\overline{BD}\times\overline{DC}$ ，再令 $\overline{OD}=r$ ，即

$$(\frac{a+b+c}{2}\times r)^2=(\frac{a+b+c}{2})\times(\frac{a+b+c-2a}{2})\times(\frac{a+b+c-2b}{2})\times(\frac{a+b+c-2c}{2})$$

所以ΔABC的面積＝$\sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}$

另證：

ΔABC的面積＝

$$\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}ab\sqrt{1-\cos^2 C}＝\sqrt{(\frac{ab}{2})^2-(\frac{ab}{2})^2\times(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab})^2}＝$$

$$\sqrt{(\frac{ab}{2})^2-(\frac{a^2+b^2-c^2}{4})^2}＝\sqrt{(\frac{ab}{2}+\frac{a^2+b^2-c^2}{4})(\frac{ab}{2}-\frac{a^2+b^2-c^2}{4})}＝$$

$$\sqrt{(\frac{(a+b)^2-c^2}{4})(\frac{c^2-(a-b)^2}{4})}＝\sqrt{(\frac{a+b+c}{2})(\frac{a+b-c}{2})(\frac{c+a-b}{2})(\frac{c-a+b}{2})}$$

$$＝\sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}$$