

題目：拋物線 $y = x^2$ 上有 A, B 兩點，自 A, B 向直線 $L: y = x - 2$ 作垂直線，則 A, B 兩點與兩垂足恰圍成一正方形，試求此正方形之邊長？

解：

解法一：設 $A(a, b)$, $B(a+k, b+k)$ 且 $k > 0$

$$\begin{cases} b = a^2 \\ b + k = (a+k)^2 \end{cases}$$

$$d(A, B) = d(A, L), \text{ 所以 } \sqrt{2}k = \frac{|a-b-2|}{\sqrt{2}}$$

以上三式解聯立得 $(a, b, k) = (0, 0, 1), (-3, 9, 7)$

則邊長 $\sqrt{2}k = \sqrt{2}$ 或 $7\sqrt{2}$

解法二：設邊長 r ，正方形頂點 $A(a, a^2)$ 的對角頂點 $(a + \sqrt{2}r, a^2)$ ，

(因為對角線平行 X 軸且為 r 的 $\sqrt{2}$ 倍)

$$\begin{cases} a^2 = a + \sqrt{2}r - 2 \\ a^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}r = (a + \frac{\sqrt{2}}{2}r)^2 \end{cases}$$

以上二式解聯立得 $(a, r) = (0, \sqrt{2}), (-3, 7\sqrt{2})$

則邊長 $\sqrt{2}$ 或 $7\sqrt{2}$