

排列之排容原理

排容原理：

n 物 (A_1, A_2, \dots, A_n) 排成一列，若有 r 個條件限制為 “第 A_i 物不排第 i 位”

($0 \leq i \leq r \leq n$)，則其總排列數為 $\sum_{k=0}^r (-1)^k C_k^r (n-k)!$

$$\begin{array}{cccccccc}
 & & C_0^0 & & & & & 1 \\
 & & C_0^1 & C_1^1 & & & & 1 & 1 \\
 & & C_0^2 & C_1^2 & C_2^2 & & & 1 & 2 & 1 \\
 & & C_0^3 & C_1^3 & C_2^3 & C_3^3 & & & 1 & 3 & 3 & 1 \\
 \dots & & & & & & & & & & & \dots \\
 C_0^n & C_1^n & C_2^n & \dots & C_{n-1}^n & C_n^n & & 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} & \dots & n & 1
 \end{array}$$

例1: ABCDE 五人排成一列，試求以下排列之方法數

- (1) 任意排列？ (120)
- (2) A 不排首？ (96)
- (3) A 不排首，且 B 不排尾？ (78)
- (4) A 不排首，B 不排尾，C 不排中？ (64)
- (5) ABCDE 分別不排第 1, 2, 3, 4, 5 個位置？ (44)

例2: 某人寫了不同的 5 封信及信封，分別給不同的 5 個人，問

- (1) 恰有 2 封信裝錯的方法有幾種？ (10)
- (2) 恰有 3 封信裝錯的方法有幾種？ (20)
- (3) 恰有 4 封信裝錯的方法有幾種？ (45)
- (4) 全部裝錯的方法有幾種？ (44)

例3: ABCDEFG 七人排成一列，試求以下排列之方法數

- (1) A 不排首？ (4320)
- (2) A 不排首，且 B 排尾？ (600)
- (3) A 不排首尾？ (3600)
- (4) A 不排首，B 不排尾？ (3720)
- (5) A 不排首，B 不排尾，C 不排中？ (3216)

例4: 甲乙丙丁戊五人排成一列，若甲乙不排第一位，乙不排第二位，甲丁戊不排第五位，則有幾種方法數？ ($5! - 6 \times 4! + 9 \times 3! - 2 \times 2! = 26$)

例5: 有 8 個座位排成一列，甲乙丙丁四人入座，試求以下排列之方法數

- (1) 任意坐？ (1680)
- (2) 甲不坐首位，乙不坐末位？ (1290)
- (3) 甲乙不坐首位，丙不坐末位？ (1110)
- (4) 甲乙不坐首位，乙丙丁不坐末位？ (780)

例6: 甲乙丙丁戊己六人排成一列，試求以下排列之方法數

(1) 若甲乙丙丁依次不能排在第 1, 2, 3, 4 個位置上，其法若干？(362)

(2) 呈上，又甲得排第二位，乙得排第五位，其法若干？(14)

例7: 四對夫妻共舞，若夫妻不得共舞，則有多少種方法？(9)

例8: ABCDE 五人各提供一份禮物來交換，則

(1) 每人不得拿回自己的禮物，有多少種方法？(44)

(2) 若甲拿到乙的禮物，乙拿到丙的禮物，有多少種方法？(3)

例9: 甲乙丙丁戊五人排成一列，試求甲乙相鄰且甲乙丙丁戊依次不能排在第 1, 2, 3, 4, 5 個位置之方法數？(21)

例10: 甲乙丙丁.....等十人排成一列，若甲乙不排首位，丙丁不排末位，有多少種方法？
($10! - 2 \times 9! - 2 \times 9! + 4 \times 8! = 58 \times 8!$)