

第一部分：是非題

(※) 下列各敘述那些是對的，對的答「○」，錯的答「×」。

(※) 設 A, B, C 表示矩陣， O 表示零矩陣， I 表示單位矩陣。

1. 設 A 為三階方陣，且 $A \neq O$ ，則 A 必有反方陣。
2. 設 $2A+3B=4C$ ，則 $A=2C-\frac{3}{2}B$ 。
3. 若 $a=\frac{1}{2}$ ， $b=-\frac{1}{2}$ ，則 $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 。
4. 若 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} B$ ，且 A, B 為二階方陣，則 $A=B$ 。
5. 若 $A = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$ 且 $A^2=I$ ，則 $A=I$ 。
6. 設 AC, BC 都有意義，則 $AC+BC=(A+B)C=C(A+B)$ 。
7. 一平面變換的推移矩陣 $A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ，則點 $P(1, 3)$ 推移的結果，其位置的坐標為 $(3, 3)$ 。
8. 若一平面變換的矩陣表示為 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ ，則此平面變換為以 x 軸為對稱軸的對稱變換。

第二部分：填充題

1. 已知三矩陣 A, B, C 中， $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ ， $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ ， $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ ，
則 $2B-3C = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $AB = \underline{\hspace{2cm}}$ ，若 X 為 3×2 矩陣且
 $2X+3(B-2C)=4X+2(2B-3X)$ ，則 $X = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
2. 設方陣 $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 4 \\ 3 & -3 & 4 \end{bmatrix}$ ，則 $B^2 = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $B^{-1} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

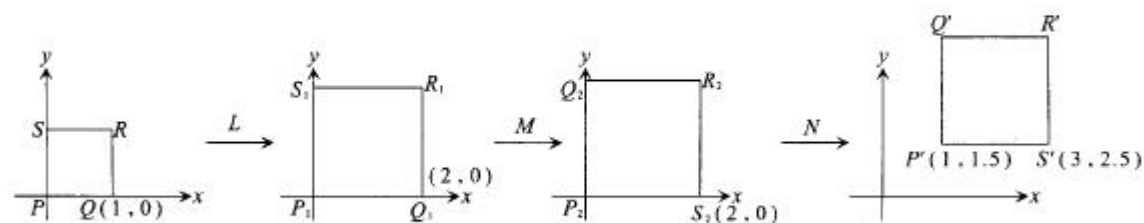
若 $BX = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ ，則 $X = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

3. 設 $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ ， $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ，則 $A^2 = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $A^3 = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $(I_2+A)^3 = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
4. 設平面上有三個坐標系 S, S', S'' ，已知 S 平移 $(3, 2)$ 得到 S' ， S' 旋轉 30° 得到 S'' ，則點 $P(1, 2)$ 對坐標系 S' 的坐標為 $\underline{\hspace{2cm}}$ ，點 P 對坐標系 S'' 的坐標為 $\underline{\hspace{2cm}}$ ，設點 Q 對坐標系 S'' 的坐標為 (x, y) ，則點 Q 對坐標系 S 的坐標為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。
5. 方陣 $A = \begin{bmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{bmatrix}$ ，若 $A = r \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$ 且 r 為正數， $0 < \theta < \pi$ ，則
 $r = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $A^6 = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
6. 設 $O(0, 0)$ ， $A(4, 2)$ 為平面上兩點，(1)若 $\triangle AOB$ 為正三角形且 B 在第一象限內，則 B 的坐標為 $\underline{\hspace{2cm}}$ ，(2)若 $OABC$ 為矩形且 C 在第二象限內，且 $\overline{OC} = 2\overline{OA}$ ，則頂點 C 的坐標為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

第三部分：演算題

1. 設方陣 $A = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$ ， $P = \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$ ，試作下列各問題：
(1)求 P^{-1} ，(2)求 $P^{-1}AP$ ，(3)求 A^{20} 。
2. 設平面上正方形 $ABCD$ ， $A(0, 0)$ ， $B(2, 0)$ ， $C(2, 2)$ ， $D(0, 2)$ ，經過線性變換 T 之後依序得 A', B', C', D' ；已知 T 的矩陣表示為 $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ，
試問：(1) A', B', C', D' 的坐標為何？
(2)四邊形 A', B', C', D' 的形狀與面積各為何？

3. 設下圖中，正方形 $PQRS$ 中， $P(0, 0)$ ， $Q(0, 1)$ ，將 $PQRS$ 經一系列的變換後逐步的映至 $P'Q'R'S'$ ，其中經過 L ， M ， N 三個變換，將 P 映至 P_1 ， P_1 映至 P_2 ， P_2 映至 P' ，其餘的頂點類推，以下圖表示每個變換的過程：



- (1) 試分別寫出 L ， M 兩變換的矩陣表示。
 (2) 設 T 表示 L ， M ， N 三個變換的合成，試求 $T(x, y)$ 。

解答

第一部分：是非題

1. × 2. ○ 3. × 4. × 5. × 6. × 7. ○ 8. ○

第二部分：填充題

1. $\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 5 & -1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 20 & 7 \\ 8 & 5 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 & \frac{13}{4} \\ -5 & \frac{7}{4} \\ 4 & \frac{13}{4} \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 4 \\ 3 & -3 & 4 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -1 \\ 10 \\ 9 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 14 & -13 \\ -13 & 14 \end{bmatrix}$

4. $(-2, 0)$, $(-\sqrt{3}, 1)$, $(3 + \frac{\sqrt{3}x - y}{2}, 2 + \frac{x + \sqrt{3}y}{2})$

5. 2, $\begin{bmatrix} 64 & 0 \\ 0 & 64 \end{bmatrix}$

6. $(2 - \sqrt{3}, 1 + 2\sqrt{3})$, $(-4, 8)$

第三部分：演算題

1. (1) $\frac{1}{13} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -8 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{7}{20} \end{bmatrix}$ (3) $\frac{1}{13} \begin{bmatrix} 8 + 5(\frac{7}{20})^{20} & 8 - 8(\frac{7}{20})^{20} \\ 5 - 5(\frac{7}{20})^{20} & 5 + 8(\frac{7}{20})^{20} \end{bmatrix}$

2. (1) $A'(0, 0)$, $B'(2, 2)$, $C'(6, 4)$, $D'(4, 2)$ (2) 平行四邊形, 4

3. (1) $L = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

(2) $T(x, y) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2y + 1 \\ 2x + 1.5 \end{bmatrix}$,

即 $T(x, y) = (2y + 1, 2x + 1.5)$