第一部分：是非題

（※）下列各敘述那些是對的，對的答「○」，錯的答「×」.

（※）設 A, B, C 表示矩陣，O 表示零矩陣，I 表示單位矩陣.

1. 設 A 爲三階方陣，且 $A\neq O$，則 A 必有反方陣.

2. 設 $2A+3B=4C$，則 $A=2C-\frac{3}{2}B$.

3. 若 $a=\frac{1}{2}$，$b=-\frac{1}{2}$，則 $\begin{bmatrix}1&1\\0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&a\\0&b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$.

4. 若 $\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}A=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}B$，且 A, B 爲二階方陣，則 $A=B$.

5. 若 $A=\begin{bmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{bmatrix}$ 且 $A^2=I$，則 $A=I$.

6. 設 AC, BC 都有意義，則 $AC+BC=(A+B)C=C(A+B)$.

7. 一平面變換的推移矩陣 $A=\begin{bmatrix}1&\frac{2}{3}\\0&1\end{bmatrix}$，則點 $P(1,3)$ 推移的結果，其位置的坐標爲 $(3,3)$.

8. 若平一面變換的矩陣表示爲 $\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}$，則此平面變換爲以 x 軸爲對稱軸的對稱變換.

第二部分：填充題

1. 已知三矩陣 A, B, C 中，$A=\begin{bmatrix}1&2&4\\3&2&0\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}2&1\\1&1\\4&1\end{bmatrix}$，$C=\begin{bmatrix}1&2\\-1&1\\2&2\end{bmatrix}$，則 $2B-3C=$______，$AB=$______，若 X 爲 3×2 矩陣且 $2X+3(B-2C)=4X+2(2B-3X)$，則 $X=$______.

2. 設方陣 $B=\begin{bmatrix}0&1&-1\\4&-3&4\\3&-3&4\end{bmatrix}$，則 $B^2=$______，$B^{-1}=$______，若 $BX=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$，則 $X=$______.

3. 設 $A=\begin{bmatrix}1&-1\\-1&1\end{bmatrix}$，$I_2=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$，則 $A^2=$______，$A^3=$______，$(I_2+A)^3=$______.

4. 設平面上有三個坐標系 S, S', S''，已知 S 平移 $(3,2)$ 得到 S'，S' 旋轉 $30°$ 得到 S''，則點 $P(1,2)$ 對坐標系 S' 的坐標爲______，點 P 對坐標系 S'' 的坐標爲______，設點 Q 對坐標系 S'' 的坐標爲 (x,y)，則點 Q 對坐標系 S 的坐標爲______.

5. 方陣 $A=\begin{bmatrix}-1&-\sqrt{3}\\\sqrt{3}&-1\end{bmatrix}$，若 $A=r\begin{bmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{bmatrix}$ 且 r 爲正數，$0<\theta<\pi$，則 $r=$______，$A^6=$______.

6. 設 $O(0,0)$，$A(4,2)$ 爲平面上兩點，(1)若 $\triangle AOB$ 爲正三角形且 B 在第一象限內，則 B 的坐標爲______，(2)若 $OABC$ 爲矩形且 C 在第二象限內，且 $\overline{OC}=2\overline{OA}$，則頂點 C 的坐標爲______.

第三部分：演算題

1. 設方陣 $A=\begin{bmatrix}\frac{3}{4}&\frac{2}{5}\\\frac{1}{4}&\frac{3}{5}\end{bmatrix}$，$P=\begin{bmatrix}8&1\\5&-1\end{bmatrix}$，試作下列各問題：

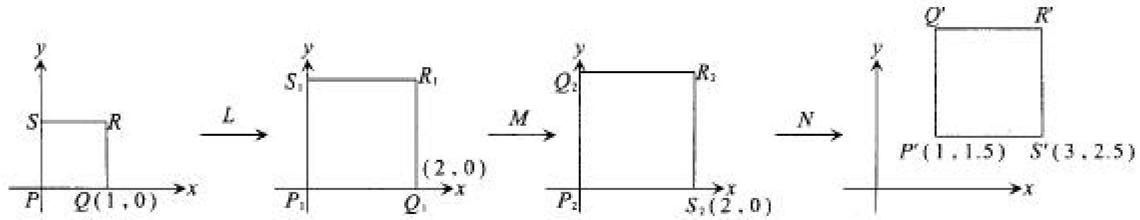
   (1)求 P^{-1}，　(2)求 $P^{-1}AP$，　(3)求 A^{20}.

2. 設平面上一正方形 $ABCD$，$A(0,0)$，$B(2,0)$，$C(2,2)$，$D(0,2)$，經過線性變換 T 之後依序得 A', B', C', D'；已知 T 的矩陣表示爲 $\begin{bmatrix}1&2\\1&1\end{bmatrix}$，

   試問：(1) A', B', C', D' 的坐標爲何？

   (2)四邊形 A', B', C', D' 的形狀與面積各爲何？

3. 設下圖中，正方形 $PQRS$ 中，$P(0,0)$，$Q(0,1)$，將 $PQRS$ 經一系列的變換後逐步的映至 $P'Q'R'S'$，其中經過 L，M，N 三個變換，將 P 映至 P_1，P_1 映至 P_2，P_2 映至 P'，其餘的頂點類推，以下圖表示每個變換的過程：



⑴試分別寫出 L，M 兩變換的矩陣表示。

⑵設 T 表示 L，M，N 三個變換的合成，試求 $T(x,y)$。

解答

第一部分：是非題

1. × 2. ○ 3. × 4. × 5. × 6. × 7. ○ 8. ○

第二部分：填充題

1. $\begin{bmatrix}1 & -4\\ 5 & -1\\ 2 & -4\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}20 & 7\\ 8 & 5\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}2 & \frac{13}{4}\\ \frac{-5}{4} & \frac{7}{4}\\ 4 & \frac{13}{4}\end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}0 & 1 & -1\\ 4 & -3 & 4\\ 3 & -3 & 4\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}-1\\ 10\\ 9\end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix}2 & -2\\ -2 & 2\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}4 & -4\\ -4 & 4\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}14 & -13\\ -13 & 14\end{bmatrix}$

4. $(-2,0)$，$(-\sqrt{3},1)$，$(3+\frac{\sqrt{3}x-y}{2},2+\frac{x+\sqrt{3}y}{2})$

5. 2，$\begin{bmatrix}64 & 0\\ 0 & 64\end{bmatrix}$

6. $(2-\sqrt{3},1+2\sqrt{3})$，$(-4,8)$

第三部分：演算題

1. ⑴ $\frac{1}{13}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 5 & -8\end{bmatrix}$ ⑵ $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{7}{20}\end{bmatrix}$ ⑶ $\frac{1}{13}\begin{bmatrix}8+5(\frac{7}{20})^{20} & 8-8(\frac{7}{20})^{20}\\ 5-5(\frac{7}{20})^{20} & 5+8(\frac{7}{20})^{20}\end{bmatrix}$

2. ⑴ $A'(0,0)$，$B'(2,2)$，$C'(6,4)$，$D'(4,2)$ ⑵平行四邊形，4

3. ⑴ $L=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}$，$M=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$

⑵ $T(x,y)=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 1.5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2y+1\\ 2x+1.5\end{bmatrix}$，

即 $T(x,y)=(2y+1,2x+1.5)$