例：下列數列是否收斂？若收斂，試求其極限值

1. $a_1=\sqrt{2}$，$a_{n+1}=\sqrt{2a_n}$ (2)

2. $a_1=\sqrt{2}$，$a_{n+1}=2\sqrt{a_n}$

3. $a_1=\sqrt{2}$，$a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}$ (2)

4. $a_1=4$，$a_{n+1}=\sqrt{3a_n+10}$ (5)

5. $a_1=3$，$a_{n+1}=\sqrt{a_n+6}$ (3)

6. $a_1=3$，$a_{n+1}=\sqrt{a_n+3}$ $(\frac{1+\sqrt{13}}{2})$

7. $a_1=4$，$a_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+\frac{4}{a_n})$ (2)

8. $\sqrt{3}$，$\sqrt{3\sqrt{3}}$，$\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}}$，… (3)

9. $\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\dots}}}$ $(-1+\sqrt{2})$

10.

例：夾擊原理

1. $k\in N$，$\lim\limits_{n->\infty}\frac{1}{n^k}$ =? (0，$0<\frac{1}{n^k}<\dots<\frac{1}{n^3}<\frac{1}{n^2}<\frac{1}{n}$)

2. $k\in N$，$\lim\limits_{n->\infty}\frac{1}{k^n}$ =? (0)

3. $\lim\limits_{n->\infty}\frac{n}{2^n}$ =? (0，$n^2\le 2^n$)

4. $\lim\limits_{n->\infty}\frac{n}{5^n}$ =? (0，$n\le 2^n$)

5. $\lim\limits_{n->\infty}\sqrt[n]{n}$ =? (0，$\sqrt[n]{n}<1+\sqrt{\frac{2}{n}}$，

$$(1+\sqrt{\frac{2}{n}})^n\ge 1+n\sqrt{\frac{2}{n}}+\frac{n(n-1)}{2}\sqrt{\frac{2}{n}}^2\ge 1+\frac{n(n-1)}{2}\sqrt{\frac{2}{n}}^2=1+(n-1)=n)$$

6. $a>0$，$\lim\limits_{n->\infty}\sqrt[n]{a}$ =? (1，pf:**令** $x=\sqrt[n]{a}-1$ **且** $a\ge 1$，$a=(1+x)^n=$

$1+nx+\ldots$，故$a>nx$，$\left|\sqrt[n]{a}-1\right|=x<\dfrac{a}{n}$，$\lim\limits_{n->\infty}\left|\sqrt[n]{a}-1\right|=0$，$\lim\limits_{n->\infty}\sqrt[n]{a}=1$。

再令$0<a<1$時$b=\dfrac{1}{a}$，再利用以上結果，即可得)

7. 設$a_n=1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{4}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}$

(1) 證明：$2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})<\dfrac{1}{\sqrt{n}}<2(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})$

(2) 證明：$2(\sqrt{n+1}-1)<a_n<2\sqrt{n}$

(3) 求$\lim\limits_{n->\infty}\dfrac{a_n}{\sqrt{n}}$之值

解：(1)$2(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})=\dfrac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}>\dfrac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n}}=\dfrac{1}{\sqrt{n}}$

$2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\dfrac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}<\dfrac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n}}=\dfrac{1}{\sqrt{n}}$

故$2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})<\dfrac{1}{\sqrt{n}}<2(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})$

(2) $2(\sqrt{1+1}-\sqrt{1})<\dfrac{1}{\sqrt{1}}<2(\sqrt{1}-\sqrt{1-1})$

$2(\sqrt{2+1}-\sqrt{2})<\dfrac{1}{\sqrt{2}}<2(\sqrt{2}-\sqrt{2-1})$

…

$2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})<\dfrac{1}{\sqrt{n}}<2(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})$

相加即得$2(\sqrt{n+1}-1)<a_n<2\sqrt{n}$

(3)由(1)得$2(\dfrac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}-\dfrac{1}{\sqrt{n}})<\dfrac{a_n}{\sqrt{n}}<2$

當$n->\infty$，$2(\dfrac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}-\dfrac{1}{\sqrt{n}})->2$

故$\lim\limits_{n->\infty}\dfrac{a_n}{\sqrt{n}}=2$

8. $\lim\limits_{n->\infty}(\dfrac{1}{\sqrt{2n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{2n^2+2}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{2n^2+n}})=$？ ($\sqrt{\dfrac{1}{2}}$，

$\dfrac{n}{\sqrt{2n^2+n}}\le\dfrac{1}{\sqrt{2n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{2n^2+2}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{2n^2+n}}\le\dfrac{n}{\sqrt{2n^2+1}}$)

9. $\lim\limits_{n->\infty}(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+...+\frac{1}{\sqrt{n^2+2n}})=$？ （2，

$\frac{n}{\sqrt{n^2+2n}}\le\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+...+\frac{1}{\sqrt{n^2+2n}}\le\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$）

10. $\lim\limits_{n->\infty}(\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+...+\frac{1}{(n+n)^2})=$？ （0，

$\frac{n}{(n+n)^2}\le\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+...+\frac{1}{(n+n)^2}\le\frac{n}{(n+1)^2}$）

11. $\lim\limits_{n->\infty}\frac{n!}{n^n}=$？ （0， $0\le(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})...(1-\frac{n-2}{n})\le 1$， $\frac{n!}{n^n}=$

$\frac{n}{n}\times\frac{n-1}{n}\times\frac{n-2}{n}\times...\times\frac{1}{n}=1\times(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})...(1-\frac{n-2}{n})\times\frac{1}{n}\le\frac{1}{n}$）

12. **設**$n\in N$，**求**$\lim\limits_{n->\infty}\frac{2^n}{n!}=$？ （0，

$n!>1\times2\times3\times3\times3\times...\times3=2\times3^{n-2}$， $0<\frac{2^n}{n!}<\frac{2^n}{2\times3^{n-2}}=2(\frac{2}{3})^{n-2}$）

13. **設數列**$a_n=\sqrt{1\times2}+\sqrt{2\times3}+\sqrt{3\times4}+...+\sqrt{n\times(n+1)}$

(1) **試證：**$\frac{n(n+1)}{2}<a_n<\frac{(n+1)^2}{2}$

(2) **試求**$\lim\limits_{n->\infty}\frac{a_{2n}}{a_n}$ （4）

14. 1

例：(是非題)

1. $<a_n>$**與**$<b_n>$**皆為發散，則**
   (1) $<a_n+b_n>$**必發散？** (N)
   (2) $<a_n-b_n>$**必發散？** (N)
   (3) $<a_n\times b_n>$**必發散？** (N)
   (4) $<a_n\div b_n>$**必發散？** (N)
2. $<a_n>$**與**$<b_n>$**皆為收斂，則**
   (1) $<a_n+b_n>$**必收斂？** (Y)
   (2) $<a_n-b_n>$**必收斂？** (Y)
   (3) $<a_n\times b_n>$**必收斂？** (Y)
   (4) $<a_n\div b_n>$**必收斂？** (N)
3. $<a_n>$**為發散，**$<b_n>$**為收斂，則**
   (1) $<a_n-b_n>$**必收斂？** (N，**振動數列**)
   (2) $<a_n\times b_n>$**必收斂？** (N，**振動數列**)
   (3) $<a_n\div b_n>$**必收斂？** (N，**振動數列**)

(4) $<b_n - a_n>$必收斂？ (N，振動數列)
(5) $<b_n \div a_n>$必收斂？ (N，振動數列)

4. 下列何者為真？
(1) 若$<a_n>$為遞增數列，則$a_n \to \infty$ (N，定值)
(2) 若$<a_n>$為遞增數列，則$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \to \infty$ (Y)
(3) 若$<a_n>$為遞減數列，則$a_n \to -\infty$ (N，定值)
(4) 若$<a_n>$為遞減數列，則$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \to -\infty$ (Y)
(5) 若$|a_n| \to 0$，則$a_n \to 0$ (Y)
(6) 若$<a_n + b_n>$收斂，$<a_n>$與$<b_n>$皆為收斂 (N，$\pm n$)
(7) 若對於$<a_n>$任一項均有$a_n \le a$，則$<a_n>$必收斂 (N，振動)
(8) 若對於$<a_n>$任一項均有$a_n < a$，且$<a_n>$收斂，則必$\lim_{n->\infty} a_n < a$ (N，=)
(9) 若$<a_n>$發散，則$\lim_{n->\infty} a_n = \infty$ (N)
(10) 若對於$<a_n>$任連續項均有$a_{n+1} \ge a_n > 0$，則$\lim_{n->\infty} a_n = \infty$ (N)
(11) 三數列$<a_n>$、$<b_n>$與$<c_n>$，若對於一切自然數n，均有$a_n \le b_n \le c_n$，且$<a_n>$及$<c_n>$均收斂，則$<b_n>$必收斂 (N，振動)
(12) 若$<a_n>$、$<b_n>$均為收斂數列，則$\lim_{n->\infty} a_n = \lim_{n->\infty} b_n$

5. 試求下列各式之值
(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-1}{5^n}$ ($\frac{11}{16}$，S=…，rS=…，(1-r)S=…)
(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{5^n}$
(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-1}{3^n}$
(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{3^n}$
(5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{3^n}$ (6)
(6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{8^n}$ ($\frac{80}{49}$)

(7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{7^n}$ $(\frac{14}{9})$

(8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\times 2^n+2^{n-1}}{3^{n-1}}$ (21)

(9) $\sum_{n=1}^{\infty}(3n-2)\times(\frac{3}{4})^n$ (30)

6.