

1. 試判斷下列各數列 $\{a_n\}$ 是收斂或發散？

(1)  $\{a_n\} = \{\cos n\pi\}$  (發)

(2)  $\{a_n\} = \{(-1)^{n+1} \frac{3n+2}{2n-3}\}$  (發)

(3)  $\{a_n\} = \{(-1)^n (n^2 + n - 3)\}$  (發)

(4)  $\{a_n\} = \{\frac{3^n + 4^n}{5^n}\}$  (收)

2. 試計算下列各極限值？

(1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{3}{n} + \frac{2}{5^n} - 4)$  (-4)

(2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{5}{n^2} + \frac{4}{5^n} + 3)$  (3)

3. 試計算下列各極限值？

(1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n^2+n+1}$  (0)

(2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2+3n+5}{3n^2}$  ( $\frac{2}{3}$ )

(3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+n}{n^2+n+1}$  (1)

(4)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4-3n-5n^2}{2n^2}$  ( $-\frac{5}{2}$ )

(5)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3+n^2}{n^2+n+1}$  (No)

(6)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^3+2n^2+4n+5}{3n^3-n^2+n+5}$  ( $\frac{5}{3}$ )

(7)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{3n^2}$  ( $\frac{2n+1}{3n^2}$ )

(8)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n+8}{2n^2+n+1}$  (0)

4. 試計算下列各極限值？

(1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n + 7^n}{5^{n+1} + 7^{n+1}}$  ( $\frac{1}{7}$ )

(2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1})$  (1)

(3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n}}{\sqrt{3n+1} - \sqrt{3n}}$  (?)

(4)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2})(\sqrt{n+3} - \sqrt{n+4})$  (-1)

5. 試計算下列各極限值？

(1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} (1+2+\dots+n)$  ( $\frac{1}{2}$ )

(2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} (1^2+2^2+\dots+n^2)$  ( $\frac{1}{3}$ )

(3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+3+\dots+(2n-1)}{2+4+\dots+2n}$  (1)

6. 下列敘述何者為真？(TFFFTT)

- (1) 若 $\{a_n\}$ 為收斂數列， $\{b_n\}$ 為發散數列，則數列 $\{a_n + b_n\}$ 必為發散數列。
- (2) 若 $\{a_n\}$ 與 $\{b_n\}$ 皆為發散數列，則數列 $\{a_n + b_n\}$ 必為發散數列。
- (3) 若 $\{a_n\}$ 為收斂數列， $\{b_n\}$ 為發散數列，則數列 $\{a_n b_n\}$ 必為發散數列。
- (4) 若 $\{a_n\}$ 與 $\{b_n\}$ 皆為發散數列，則數列 $\{a_n b_n\}$ 必為發散數列。
- (5) 若 $\{a_n\}$ 與 $\{b_n\}$ 皆為收斂數列，則數列 $\{a_n + b_n\}$ 必為收斂數列。
- (6) 若 $\{a_n\}$ 與 $\{b_n\}$ 皆為收斂數列，則數列 $\{a_n b_n\}$ 必為收斂數列。

7. 試計算下列各極限值？

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{n^2} (\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}) \quad \left(\frac{1}{3}\right)$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} n^3 (\sqrt{n^2+1} - n - \frac{1}{2n}) \quad \left(-\frac{1}{8}\right)$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{8^n + 5^n + 3^n} \quad (8)$$

8. 數列 $\{a_n\}$ ， $a_n = \frac{1}{\sqrt{4n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{4n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{4n^2+n}}$

$$(1) \text{ 試證 } \frac{n}{\sqrt{4n^2+n}} \leq a_n \leq \frac{n}{\sqrt{4n^2+1}}$$

$$(2) \text{ 試求 } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \quad \left(\frac{1}{2}\right)$$

9. 數列 $\{a_n\}$ ， $a_n = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \dots + \frac{1}{(2n)^2}$ ，試求 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  (0)

10. 數列 $\{a_n\}$ ， $a_{n+1} = 3 - \frac{2}{a_n}$ ， $n \geq 1$ ，且 $a_1 = 3$

$$(1) \text{ 試將 } a_n \text{ 表成 } n \text{ 的函數。} \quad \left(a_n = \frac{2^{n+1}-1}{2^n-1}\right)$$

$$(2) \text{ 試求 } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \quad (2)$$

11. 試計算下列各極限值？

$$(1) \lim_{n \rightarrow 1} \frac{x^3 - x}{x - 1} \quad (2)$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{x^2 - 4} \quad \left(\frac{1}{8\sqrt{2}}\right)$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 4}{|x - 2|} \quad (-4)$$

$$(4) \lim_{n \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x^2 - x}}{x - x^2} \quad (-\infty)$$

12. 試計算下列各函數在 $x=2$ 處的右極限與左極限？

$$(1) f(x) = \begin{cases} 2x+3, & \text{若 } x < 2 \\ x+1, & \text{若 } x \geq 2 \end{cases} \quad (7,3)$$

$$(2) f(x) = \begin{cases} 2|x-1|, & \text{若 } x < 2 \\ |2-x|, & \text{若 } x \geq 2 \end{cases} \quad (2,0)$$

13. 設  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{|x - 1|}$ ,  $x \neq 1$ , 試求下列各極限值?

- (1)  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$  (2)  
 (2)  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$  (-2)  
 (3)  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  (不存在)

14. 試求實數  $a$  與  $b$  的值, 使  $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b, & \text{若 } x < 2 \\ x^3 + 2ax^2 - 3bx - 1, & \text{若 } x \geq 2 \end{cases}$  在  $x = 2$  處的極限值是 9? ( $a = \frac{8}{5}, b = \frac{9}{5}$ )

15. 試計算下列各極限值?

- (1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 - 2x - x}}$  (-1)  
 (2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 - 2x - x}}$  (0)

16. 試計算下列各極限值?

- (1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 - 2x})$  (2)  
 (2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 - 2x})$  (-2)

17. 試求實數  $a$  與  $b$  的值, 使  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 + ax + b}{x^2 - 5x + 4} = \frac{5}{3}$ ? ( $a = -3, b = -4$ )

18. 試求實數  $a$  與  $b$  的值, 使  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{ax - (6b + 2)}{\sqrt{x} - 2} = 20$ ? ( $a = 5, b = 3$ )

19. 試求下列各極限值?

- (1)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{[x]}{x}$  (0)  
 (2)  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{[x]}{x}$  ( $\infty$ )  
 (3)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{[x]}{x}$  (1)  
 (4)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{[x]}{x}$  (1)

20. 試求實數  $a$  的值, 使  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + a^2x^2 - ax - 20}{3x^2 - 5x - 2}$  存在, 並求出此極限值? ( $a = 2$ )

時  $\frac{26}{7}, a = -\frac{3}{2}$  時  $\frac{45}{14}$ )

21. 試求下列各極限值?

- (1)  $\lim_{n \rightarrow 1} \sin \frac{(x^2 - x)^p}{2(x - 1)}$  (1)  
 (2)  $\lim_{n \rightarrow 1} \cos \frac{p}{x^2 + 1}$  (0)

22. 設  $a$  與  $b$  是正數, 若函數  $f(x) = \log_3(ax^2 + bx) - 2\log_3|x|$ , 滿足  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$ ,

$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 0$ , 試求  $a$  與  $b$  的值? ( $a = 14, b = 13$ )

23. 設  $f(x) = x^2 - 1$ ,  $g(x) = 2x + 1$ , 試求下列各極限值?

(1)  $\lim_{x \rightarrow 1} [f(g(x)) - g(f(x))]$  (7)

(2)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} \times \frac{f(x)}{g(x)}$  ( $\frac{2}{3}$ )

24. 試求下列各極限值?

(1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^4} \sum_{k=1}^n k(n-k)^2$  ( $\frac{1}{12}$ )

(2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n+k} + \sqrt{n+k-1}}$  ( $\sqrt{2} - 1$ )

(3)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{\sqrt{x^2 + x + 2} - 2}$  ( $\frac{16}{3}$ )

(4)  $\lim_{x \rightarrow 64} \frac{x^{\frac{1}{3}} - 4}{\frac{1}{x^2} - 8}$  ( $\frac{1}{3}$ )

25. 試求下列各極限值?

(1)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (x + \sqrt{x^2 - 4x + 1})$  ( $\infty$ )

(2)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + \sqrt{x^2 - 4x + 1})$  (2)

26. 設  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = -2$ , 試求

(1)  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  之值? (0)

(2)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$  之值? (0)

27. 設  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = a$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = b$ , 試求下列各極限值?

(1)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x^3 - x)$  (b)

(2)  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x^3 - x)$  (a)

(3)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x^2 - x^4)$  (a)

(4)  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x^2 - x^4)$  (a)

28. 試求下列各極限值?

(1)  $\lim_{n \rightarrow 0} \frac{x}{|x-1| - |x+1|}$  ( $-\frac{1}{2}$ )

(2)  $\lim_{n \rightarrow 3} \frac{|5-2x| - |x-2|}{|x-5| - |3x-7|}$  ( $-\frac{1}{4}$ )

29. 試求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x\sqrt{x+1}(1-\sqrt{2x+3})}{7-6x+4x^2}$  之值? ( $-\frac{\sqrt{2}}{4}$ )

30. 有一數列  $\{a_n\}$ , 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n + 1}{3a_n - 4} = \frac{3}{2}$

(1) 此數列  $\{a_n\}$  是否必為收斂數列? (YES)

(2) 試求  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  (2, hint: 令  $b_n = \frac{a_n + 1}{3a_n - 4}$ )