

1. 試判斷下列各數列 $\{a_n\}$ 是收斂或發散？

(1) $\{a_n\} = \{\cos n\pi\}$ (發)

(2) $\{a_n\} = \{(-1)^{n+1} \frac{3n+2}{2n-3}\}$ (發)

(3) $\{a_n\} = \{(-1)^n (n^2 + n - 3)\}$ (發)

(4) $\{a_n\} = \{\frac{3^n + 4^n}{5^n}\}$ (收)

2. 試計算下列各極限值？

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{3}{n} + \frac{2}{5^n} - 4)$ (-4)

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{5}{n^2} + \frac{4}{5^n} + 3)$ (3)

3. 試計算下列各極限值？

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n^2+n+1}$ (0)

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2+3n+5}{3n^2}$ ($\frac{2}{3}$)

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+n}{n^2+n+1}$ (1)

(4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4-3n-5n^2}{2n^2}$ ($-\frac{5}{2}$)

(5) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3+n^2}{n^2+n+1}$ (No)

(6) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^3+2n^2+4n+5}{3n^3-n^2+n+5}$ ($\frac{5}{3}$)

(7) $\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{3n^2}$ ($\frac{2n+1}{3n^2}$)

(8) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n+8}{2n^2+n+1}$ (0)

4. 試計算下列各極限值？

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n + 7^n}{5^{n+1} + 7^{n+1}}$ ($\frac{1}{7}$)

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1})$ (1)

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n}}{\sqrt{3n+1} - \sqrt{3n}}$ (?)

(4) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2})(\sqrt{n+3} - \sqrt{n+4})$ (-1)

5. 試計算下列各極限值？

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} (1+2+\dots+n)$ ($\frac{1}{2}$)

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} (1^2+2^2+\dots+n^2)$ ($\frac{1}{3}$)

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+3+\dots+(2n-1)}{2+4+\dots+2n}$ (1)

6. 下列敘述何者為真？(TFFFTT)

- (1) 若 $\{a_n\}$ 為收斂數列， $\{b_n\}$ 為發散數列，則數列 $\{a_n + b_n\}$ 必為發散數列。
- (2) 若 $\{a_n\}$ 與 $\{b_n\}$ 皆為發散數列，則數列 $\{a_n + b_n\}$ 必為發散數列。
- (3) 若 $\{a_n\}$ 為收斂數列， $\{b_n\}$ 為發散數列，則數列 $\{a_n b_n\}$ 必為發散數列。
- (4) 若 $\{a_n\}$ 與 $\{b_n\}$ 皆為發散數列，則數列 $\{a_n b_n\}$ 必為發散數列。
- (5) 若 $\{a_n\}$ 與 $\{b_n\}$ 皆為收斂數列，則數列 $\{a_n + b_n\}$ 必為收斂數列。
- (6) 若 $\{a_n\}$ 與 $\{b_n\}$ 皆為收斂數列，則數列 $\{a_n b_n\}$ 必為收斂數列。

7. 試計算下列各極限值？

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{n^2} (\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}) \quad \left(\frac{1}{3}\right)$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} n^3 (\sqrt{n^2+1} - n - \frac{1}{2n}) \quad \left(-\frac{1}{8}\right)$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{8^n + 5^n + 3^n} \quad (8)$$

8. 數列 $\{a_n\}$ ， $a_n = \frac{1}{\sqrt{4n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{4n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{4n^2+n}}$

$$(1) \text{ 試證 } \frac{n}{\sqrt{4n^2+n}} \leq a_n \leq \frac{n}{\sqrt{4n^2+1}}$$

$$(2) \text{ 試求 } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \quad \left(\frac{1}{2}\right)$$

9. 數列 $\{a_n\}$ ， $a_n = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \dots + \frac{1}{(2n)^2}$ ，試求 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ (0)

10. 數列 $\{a_n\}$ ， $a_{n+1} = 3 - \frac{2}{a_n}$ ， $n \geq 1$ ，且 $a_1 = 3$

$$(1) \text{ 試將 } a_n \text{ 表成 } n \text{ 的函數。} \quad \left(a_n = \frac{2^{n+1}-1}{2^n-1}\right)$$

$$(2) \text{ 試求 } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \quad (2)$$

11. 試計算下列各極限值？

$$(1) \lim_{n \rightarrow 1} \frac{x^3 - x}{x - 1} \quad (2)$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{x^2 - 4} \quad \left(\frac{1}{8\sqrt{2}}\right)$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 4}{|x - 2|} \quad (-4)$$

$$(4) \lim_{n \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x^2 - x}}{x - x^2} \quad (-\infty)$$

12. 試計算下列各函數在 $x=2$ 處的右極限與左極限？

$$(1) f(x) = \begin{cases} 2x+3, & \text{若 } x < 2 \\ x+1, & \text{若 } x \geq 2 \end{cases} \quad (7,3)$$

$$(2) f(x) = \begin{cases} 2|x-1|, & \text{若 } x < 2 \\ |2-x|, & \text{若 } x \geq 2 \end{cases} \quad (2,0)$$

13. 設 $f(x) = \frac{x^2 - 1}{|x - 1|}$, $x \neq 1$, 試求下列各極限值?

- (1) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ (2)
 (2) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ (-2)
 (3) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ (不存在)

14. 試求實數 a 與 b 的值, 使 $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b, & \text{若 } x < 2 \\ x^3 + 2ax^2 - 3bx - 1, & \text{若 } x \geq 2 \end{cases}$ 在 $x = 2$ 處的極限值是 9? ($a = \frac{8}{5}, b = \frac{9}{5}$)

15. 試計算下列各極限值?

- (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 - 2x - x}}$ (-1)
 (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 - 2x - x}}$ (0)

16. 試計算下列各極限值?

- (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 - 2x})$ (2)
 (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 - 2x})$ (-2)

17. 試求實數 a 與 b 的值, 使 $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 + ax + b}{x^2 - 5x + 4} = \frac{5}{3}$? ($a = -3, b = -4$)

18. 試求實數 a 與 b 的值, 使 $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{ax - (6b + 2)}{\sqrt{x} - 2} = 20$? ($a = 5, b = 3$)

19. 試求下列各極限值?

- (1) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{[x]}{x}$ (0)
 (2) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{[x]}{x}$ (∞)
 (3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{[x]}{x}$ (1)
 (4) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{[x]}{x}$ (1)

20. 試求實數 a 的值, 使 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + a^2x^2 - ax - 20}{3x^2 - 5x - 2}$ 存在, 並求出此極限值? ($a = 2$)

時 $\frac{26}{7}, a = -\frac{3}{2}$ 時 $\frac{45}{14}$)

21. 試求下列各極限值?

- (1) $\lim_{n \rightarrow 1} \sin \frac{(x^2 - x)^p}{2(x - 1)}$ (1)
 (2) $\lim_{n \rightarrow 1} \cos \frac{p}{x^2 + 1}$ (0)

22. 設 a 與 b 是正數, 若函數 $f(x) = \log_3(ax^2 + bx) - 2\log_3|x|$, 滿足 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$,

$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 0$, 試求 a 與 b 的值? ($a = 14, b = 13$)

23. 設 $f(x) = x^2 - 1$, $g(x) = 2x + 1$, 試求下列各極限值？

(1) $\lim_{x \rightarrow 1} [f(g(x)) - g(f(x))] \quad (7)$

(2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} \times \frac{f(x)}{g(x)} \quad \left(\frac{2}{3}\right)$

24. 試求下列各極限值？

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^4} \sum_{k=1}^n k(n-k)^2 \quad \left(\frac{1}{12}\right)$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n+k} + \sqrt{n+k-1}} \quad (\sqrt{2} - 1)$

(3) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{\sqrt{x^2 + x + 2} - 2} \quad \left(\frac{16}{3}\right)$

(4) $\lim_{x \rightarrow 64} \frac{x^{\frac{1}{3}} - 4}{\frac{1}{x^2} - 8} \quad \left(\frac{1}{3}\right)$

25. 試求下列各極限值？

(1) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x + \sqrt{x^2 - 4x + 1}) \quad (\infty)$

(2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + \sqrt{x^2 - 4x + 1}) \quad (2)$

26. 設 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = -2$, 試求

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 之值？ (0)

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ 之值？ (0)

27. 設 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = a$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = b$, 試求下列各極限值？

(1) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x^3 - x)$ (b)

(2) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x^3 - x)$ (a)

(3) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x^2 - x^4)$ (a)

(4) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x^2 - x^4)$ (a)

28. 試求下列各極限值？

(1) $\lim_{n \rightarrow 0} \frac{x}{|x-1| - |x+1|} \quad \left(-\frac{1}{2}\right)$

(2) $\lim_{n \rightarrow 3} \frac{|5-2x| - |x-2|}{|x-5| - |3x-7|} \quad \left(-\frac{1}{4}\right)$

29. 試求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x\sqrt{x+1}(1-\sqrt{2x+3})}{7-6x+4x^2}$ 之值？ $\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$

30. 有一數列 $\{a_n\}$, 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n + 1}{3a_n - 4} = \frac{3}{2}$

(1) 此數列 $\{a_n\}$ 是否必為收斂數列？ (YES)

(2) 試求 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ $\left(2, \text{hint: 令 } b_n = \frac{a_n + 1}{3a_n - 4}\right)$