

數列與級數

一、名詞：數列、遞增、遞減、單調、上界、下界、連分數、第 n 個漸近分數

二、單調數列

遞增而有上界數列必收斂於其上界

遞減而有下界數列必收斂於其下界

例1: 設 a_n 表數列 $\langle \frac{n}{2n+1} \rangle$ 的第 n 項 $\frac{n}{2n+1}$ ，試求數列 $\langle a_n \rangle$ 前後項的大小關係？

例2: 試證 $\langle \frac{n+1}{n} \rangle$ 為遞減而有下界的數列，又其極限為何？

例3: 設 a_n 表半徑為 1 的圓內接正 2^n 邊形的面積，試求數列 $\langle a_n \rangle$ 當 $n \geq 2$ 時前後項間之大小關係？又此數列與圓面積的關係為何？

例4: 設 a_n 表半徑為 1 的圓內接正 2^n 邊形的一邊與圓心所成三角形之面積，試以三角公式表示 a_n ？並探討 a_n 與 a_{n+1} 間之大小關係？(註：三國時魏人劉徽就是用這種原理求得 π 的近似值為 3.14159；南北朝的祖沖之更求得 π 的近似值介於 3.1415926 與 3.1415927 之間；而阿基米德則用內接及外切正多邊形周長來逼近圓周長的方法，求得 $\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$)

例5: 設 $a_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}$ ，試證 $\langle a_n \rangle$ 為遞增且有上界的數列？(註： $\langle a_n \rangle$ 的極限是 $e = 2.718281828459025\dots$)

例6: 設 $a_n = 2 \times \frac{2 \times 2}{1 \times 3} \times \frac{4 \times 4}{3 \times 5} \times \dots \times \frac{2n \times 2n}{(2n-1)(2n+1)}$ ，試證 $\langle a_n \rangle$ 為遞增且有上界的數列？(註： $\langle a_n \rangle$ 的極限是 π)

例7: 複利公式 $A_n = P(1+r)^n$ ，若本金 $P=1$ ，利率 $r = \frac{1}{n}$ ，則 $A_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ 也是有上界，其上界極限值為 e

三、連分數(祖沖之用之)

$\frac{5}{3} = 1 + \frac{2}{3} = 1 + \frac{1}{\frac{3}{2}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}$ ，我們用 $r_3 = \langle 1, 1, 2 \rangle$ 來表示連分數的第 3 個漸近分數，亦可說

連分數 $\langle r_n \rangle$ 的收斂值為 $\frac{5}{3}$

化成連分數的方法即 **不留分子不為 1 的分數**

例1: 求 $\frac{99}{70}$ 的連分數表示？

例2: 求 $\frac{49}{23}$ 的連分數表示？

例3: 求 $\sqrt{2}$ 的連分數表示？並計算其漸近分數 r_n ， $0 \leq n \leq 5$ ，在與 $\sqrt{2} = 1.41421356$ 比較？

例4: 求 $\sqrt{5}$ 的連分數表示？並計算其漸近分數 r_n ， $0 \leq n \leq 5$ ，在與 $\sqrt{5} = 2.23606797$ 比較？

例5: 地球公轉一周為 365.2422 日，月球繞一周需時 29.5306 日，故一年有 12.368 月，亦即一年應多出 0.368... 月，試求 0.368 的漸近分數，並說明農曆閏月的原則？

四、遞迴表示法

例1: $1^2, 2^2, 3^2, 4^2, \dots, n^2, \dots$ ，試求此數列的第 n 項 a_n ，並用一遞迴式表示此數列？

例2: 設 $a_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}$ ，試以一遞迴式表示數列 $\langle a_n \rangle$ ？

例3: 設 $a_n = 2 \times \frac{2 \times 2}{1 \times 3} \times \frac{4 \times 4}{3 \times 5} \times \dots \times \frac{2n \times 2n}{(2n-1)(2n+1)}$ ，試以一遞迴式表示數列 $\langle a_n \rangle$ ？

例4: 若數列 $\langle a_n \rangle$ 滿足 $a_n > 0$ ，且 $a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{k}{2a_n}$ ，其中 k 為固定正數，又假設數列 $\langle a_n \rangle$ 收斂到一實數，試求此實數？（ \sqrt{k} ）

五、級數與歸納法

如果通項為 n 的 m 次式，則級數和為 n 的 $m+1$ 次式

例1: 求 $A_n = 1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \dots + n(n+1)$ 的公式