有兩個主要理由來研究一般性線性轉換的矩陣，一為理論的，另一則為頗實際的。

- 回答關於在有限維向量空間中的一般性線性轉換結構的理論問題，經常可經由研究矩陣轉換獲得。此類事實將在更高級的線性代數裏做更詳細的討論。但在稍後幾節將會接觸到它們。
- 利用矩陣乘法，使得利用這些矩陣來計算向量的映像成為可能。此類計算可在計算機上快速地執行。

為專著於探討後一概念，令 $T: V \to W$ 為一線性轉換，如圖 5 所示，矩陣 $[T]_{B',B}$ 可藉下列三個步驟，間接地求得 $T(\mathbf{x})$。

(1)求座標矩陣 $[\mathbf{x}]_B$。

(2)將 $[T]_{B',B}$ 乘於 $[\mathbf{x}]_B$ 的左邊，以產生 $[T(\mathbf{x})]_{B'}$。

(3)由座標矩陣重造 $T(\mathbf{x})$。

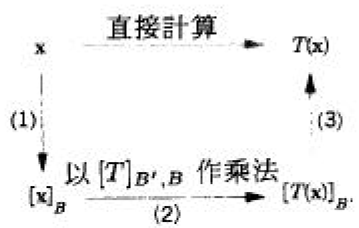

圖 5

例題 6

令 $T: P_2 \to P_2$ 為線性運算子，並定義為

$$T(p(x)) = p(3x-5)$$

亦即

$$T(c_0 + c_1x + c_2x^2) = c_0 + c_1(3x-5) + c_2(3x-5)^2$$

(a)試求對基底 $B = \{1, x, x^2\}$ 的 $[T]_B$。

(b)試使用間接法求 $T(1+2x+3x^2)$。

(c)試以直接計算 $T(1+2x+3x^2)$ 來檢查 (b) 的結果。

解 (a)：由 T 的公式

$$T(1) = 1, \qquad T(x) = 3x-5, \qquad T(x^2) = (3x-5)^2 = 9x^2 - 30x + 25$$

所以，

$$[T(1)]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad [T(x)]_B = \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad [T(x^2)]_B = \begin{bmatrix} 25 \\ -30 \\ 9 \end{bmatrix}$$

因此，

$$[T]_B = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 25 \\ 0 & 3 & -30 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

解 (b)：向量 $\mathbf{p} = 1 + 2x + 3x^2$ 對 B 的座標矩陣為

$$[\mathbf{p}]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

因此，由 (5a)

$$\begin{aligned}[T(1+2x+3x^2)]_B &= [T(\mathbf{p})]_B = [T]_B[\mathbf{p}]_B \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -5 & 25 \\ 0 & 3 & -30 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 66 \\ -84 \\ 27 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

且由上式得

$$T(1+2x+3x^2) = 66 - 84x + 27x^2$$

解 (c)：由直接計算

$$\begin{aligned}T(1+2x+3x^2) &= 1 + 2(3z-5) + 3(3X-5)^2 \\ &= 1 + 6x - 10 + 27x^2 - 90x + 75 \\ &= 66 - 84x + 27x^2\end{aligned}$$

此式和 (b) 的結果一致。▲