

錐線中點弦方程式

橢圓 $\Gamma : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ， (x_0, y_0) 爲其內部一點。試求以 (x_0, y_0) 爲中點的弦所在的直線方程式？

解：

令 (x_1, x_2) 爲該弦之一端點，則 $(2x_0 - x_1, 2y_0 - y_1)$ 爲另一端點。

$$\text{故} \begin{cases} \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1 \\ \frac{(2x_0 - x_1)^2}{a^2} + \frac{(2y_0 - y_1)^2}{b^2} = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (bx_1)^2 + (ay_1)^2 = a^2b^2 & \dots (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} b^2(2x_0 - x_1)^2 + a^2(2y_0 - y_1)^2 = a^2b^2 & \dots (2) \end{cases}$$

(1)-(2)式，得 $(\frac{x_0x_1}{a^2} + \frac{y_0y_1}{b^2}) - (\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2}) = 0$

即 $y - y_0 = \frac{-b^2x_0}{a^2y_0}(x - x_0)$