

假設一家租車公司有甲、乙、丙三個營業站，顧客可以從任何一處營業站租車並在任何一處營業站還車，根據統計發現租車處與還車處有如下的規律性：

- (1) 在甲站租車者有 30% 在甲站還車，20% 在乙站還車，50% 在丙站還車。
- (2) 在乙站租車者有 70% 在甲站還車，10% 在乙站還車，20% 在丙站還車。
- (3) 在丙站租車者有 40% 在甲站還車，50% 在乙站還車，10% 在丙站還車。

		租 車 處		
		甲	乙	丙
還 車 處	甲	0.3	0.7	0.4
	乙	0.2	0.1	0.5
	丙	0.5	0.2	0.1

今甲站購置了一輛新車，此車經第一次出租後，還回到甲乙丙站的機率依序為 0.3、0.2、0.5，那麼第二次出租後，還回到甲、乙、丙站的機率各為何？

根據率理理論可計算如下：

$$\text{回至甲站之機率} = 0.3 \times 0.3 + 0.2 \times 0.7 + 0.5 \times 0.4 = 0.43$$

$$\text{回至乙站之機率} = 0.3 \times 0.2 + 0.2 \times 0.1 + 0.5 \times 0.5 = 0.33$$

$$\text{回至丙站之機率} = 0.3 \times 0.5 + 0.2 \times 0.2 + 0.5 \times 0.1 = 0.24$$

事實上，若將表中之機率值作成三階方陣 A，即

$$A = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.7 & 0.4 \\ 0.2 & 0.1 & 0.5 \\ 0.5 & 0.2 & 0.1 \end{bmatrix}$$

$$\text{且有 } P^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, P^{(1)} = \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.2 \\ 0.5 \end{bmatrix}, P^{(2)} = \begin{bmatrix} 0.43 \\ 0.33 \\ 0.24 \end{bmatrix}, P^{(k)} \text{ 中的三個數由上到下依序表示為第 } k$$

次出租後，該車回到甲、乙、丙站的機率，即

$$P^{(1)} = A P^{(0)},$$

$$P^{(2)} = A P^{(1)} = AA P^{(0)},$$

$$P^{(3)} = A P^{(2)} = AA A P^{(1)} = AAA P^{(0)},$$

$$\dots$$

$$P^{(n)} = A P^{(n-1)} = A^n P^{(0)}$$

如此用矩陣的乘法運算，算出  $A^n P^{(0)}$  即可得知該車回到甲、乙、丙各站的機率。

**問題：**如上之情形

- (1) 某特定一部車，自甲站出租後，共經過了三次出租，最後會回到各站的機率？
- (2) 張先生因事要出國半年，想將愛車加入甲站從事出租行列(很會算喔!)。回國後，張先生想從機場搭車直接到甲、乙、丙各站取車，若張先生知道愛車共經過了 20 次出租，請問張先生該到那站取車較有可能？
- (3) 若張先生回國前先打電話，得知愛車在丙站。回國後得知愛車又租出去 3 次，請問張先生該到那站取車較有可能？
- (4) 若張先生回國後打電話，得知愛車在丙站最後租出去尚未歸還，請問張先生該到那站取車較有可能？
- (5) 若已知該汽車出租公司現在甲、乙、丙站各有車子 30、30、40 部在營運，請問各站的停車場車位最少需求數量為何？

$n$  階轉移矩陣  $A$  收斂到一行矩陣  $X$ ，且  $AX=X$ ，即  $(A-I)X=0$  且  $X$  中各元素和為 1

### 練習

1. 假設每天的天氣可略分為晴、陰、雨三種狀態，根據經驗，某地方的天氣變化有如下之規律：

I. 今日若晴天，則明日為晴天、陰天、雨天的機率各為 0.5、0.4、0.1。

II. 今日若陰天，則明日為晴天、陰天、雨天的機率各為 0.4、0.4、0.2。

III. 今日若雨天，則明日為晴天、陰天、雨天的機率各為 0.3、0.5、0.2。

若已知今日為陰天，試求兩天後天氣為晴、陰、雨天之機率為何？

解：

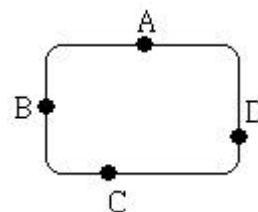
$$\text{令 } A = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.4 & 0.3 \\ 0.4 & 0.4 & 0.5 \\ 0.1 & 0.2 & 0.2 \end{bmatrix}, \text{ 則}$$

$$P^{(1)} = AP^{(0)} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.4 & 0.3 \\ 0.4 & 0.4 & 0.5 \\ 0.1 & 0.2 & 0.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.4 \\ 0.2 \end{bmatrix}$$

$$P^{(2)} = AP^{(1)} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.4 & 0.3 \\ 0.4 & 0.4 & 0.5 \\ 0.1 & 0.2 & 0.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.4 \\ 0.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.42 \\ 0.42 \\ 0.16 \end{bmatrix}$$

故兩天後天氣為晴、陰、雨天之機率為 0.42，0.42 及 0.16

2. 有一人流浪於 A,B,C,D 四地間，如圖，假設每日清晨此人決定當日夜晚繼續留宿該地，或改而前往相鄰任一地的機率皆為  $\frac{1}{3}$ 。若此人今晚夜宿 A 地，試求後天晚上此



人宿於 A,B,C,D 四地之機率各為何？ $(\frac{3}{9}, \frac{2}{9}, \frac{2}{9}, \frac{2}{9})$

3. 有一學生，他有固定的讀書習慣，如下：若他今晚讀書，則明晚也讀書的機率為 30%；若他今晚不讀書，則明晚也不讀書的機率為 60%。

(1) 試寫出轉移矩陣。 $(\begin{bmatrix} 0.3 & 0.4 \\ 0.7 & 0.6 \end{bmatrix})$

(2) 若已知本週一晚上他讀書，則本週三也讀書的機率為何？(0.37)

4. 某城市市中心與市郊人口流動情形如下：

I. 若今年住市中心，則明年會搬到市郊者為 10%，其餘不變動。

II. 若今年住市郊，則明年會搬到市中心者為 5%，其餘不變動。

(1) 試寫出轉移矩陣。 $(\begin{bmatrix} 0.9 & 0.05 \\ 0.1 & 0.95 \end{bmatrix})$

- (2) 試求四年後從市中心搬到市郊者，其機率為何？(0.3187)  
 (3) 若今年此城市市中心有 30 萬人，市郊有 42 萬人。則三年後市中心人口數有多少萬人？(假設出生與死亡達到平衡)(27.7)

5. 某城市市中心與市郊人口流動情形如下：

- I. 若今年住市中心，則明年會搬到市郊者為 10%，其餘不變動。  
 II. 若今年住市郊，則明年會搬到市中心者為 50%，其餘不變動。

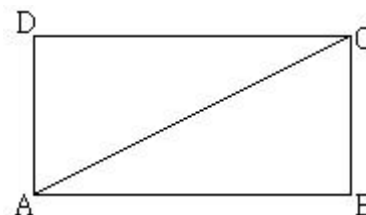
(1) 試寫出轉移矩陣。 $\left( \begin{bmatrix} 0.9 & 0.5 \\ 0.1 & 0.5 \end{bmatrix} \right)$

- (2) 試求四年後從市中心搬到市郊者，其機率為何？(0.812)  
 (3) 若今年此城市市中心有 200 萬人，市郊有 40 萬人。則四年後市中心與市郊人口數為何？(假設出生與死亡達到平衡)(200 萬人，40 萬人)  
 (4) 承上，則六年後市中心與市郊人口數為何？(200 萬人，40 萬人)

6. 有 A 與 B 兩種細菌互相突變，每一分鐘，A 突變為 B 的機率為 0.3，B 突變為 A 的機率為 0.9，而未突變的仍是原來的細菌。現在有 A 細菌 300 萬個，B 細菌 500 萬個，試求 3 分鐘後 A 與 B 細菌各有幾個？(A 有 602.4 萬個，B 有 197.6 萬個)

7. 如圖，四個城市間的交通路線圖。

- (1) 試寫出轉移矩陣。  
 (2) 從 C 出發，共走 5 路段而到達 A，總共有幾條路線？

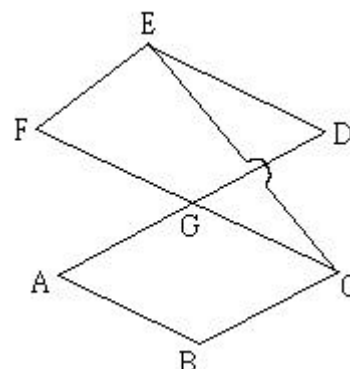


8. 假設甲城市每年有 3% 的人口移居乙城市，而乙城市每年有 2% 的人口移居甲城市。若已知此二城市  $n$  年後人口數無增減(即已達穩定)，試求  $n$  及  $n$  年後甲乙兩地人口比例？(假設無移居其他成是者)(?, 2:3)

9. 某市鎮有發行甲乙兩種報紙，目前甲報佔訂報人數的 70%，乙報佔 30%，且已知若訂報人數不變，訂甲報的人續訂甲報的比例佔 80%，轉訂乙報者佔 20%；訂乙報的人續訂乙報的比例佔 60%，轉訂甲報者佔 40%。試求後年甲乙兩種報紙佔訂報人數的比例各為何？(甲佔 0.672，乙佔 0.328，18 年後維持穩定)

10. 如圖，七個城市間的交通路線圖。

- (1) 試寫出轉移矩陣。  
 (2) 從 C 出發，共走 3 路段而到達 G，總共有幾條路線？



11. 如圖，十個城市間的交通路線圖。

(1) 試寫出轉移矩陣。

(2) 用矩陣表示 A、B、F、G 間恰經

F G

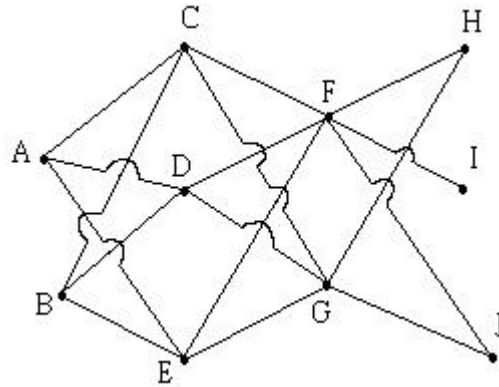
過二路段之相異路線數？

$$\left( \begin{array}{c} A \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \\ B \begin{bmatrix} 3 & 3 \end{bmatrix} \end{array} \right)$$

(3) 用矩陣表示 A、B、H、I、J 間恰經過三路段之相異路線數？

H I J

$$\left( \begin{array}{c} A \begin{bmatrix} 6 & 3 & 6 \\ 6 & 3 & 6 \end{bmatrix} \\ B \begin{bmatrix} 6 & 3 & 6 \end{bmatrix} \end{array} \right)$$



12. 某銀行固定每月十日調查其貸款客戶還款的情形，並做成紀錄予以評定等級，等級如下：

A 級：按期還款。

B 級：延遲一週內還款。

C 級：延遲一週以上才還款。

根據歷史資料顯示，若本月評定為 A 級者，在下一個月仍評定為 A 級者佔 80%，而有 10% 轉移到 B 級，10% 轉移到 C 級。若本月評定為 B 級者，在下一個月仍評定為 B 級者佔 70%，而有 20% 轉移到 A 級，10% 轉移到 C 級。若本月評定為 C 級者，在下一個月仍評定為 C 級者佔 60%，而有 15% 轉移到 A 級，25% 轉移到 B 級。假設今年七月十日調查結果，貸款客戶中有 A 級者 60%，B 級者 30%，C 級者 10%，

(1) 試寫出轉移矩陣。  $\left( \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 & 0.15 \\ 0.1 & 0.7 & 0.25 \\ 0.1 & 0.1 & 0.6 \end{bmatrix} \right)$

(2) 試預測九月十日之調查結果 A、B、C 級者各佔多少%？（A 佔 52.55、B 佔 29.95、C 佔 17.5）