

轉移矩陣

n 階轉移矩陣 A 收斂到一行矩陣 X ，且 $(A-I)X=0$ 且 X 中各元素和為 1

1. 假設每天的天氣可略分為晴、陰、雨三種狀態，根據經驗，某地方的天氣變化有如下之規律：

I. 今日若晴天，則明日為晴天、陰天、雨天的機率各為 0.5、0.4、0.1。

II. 今日若陰天，則明日為晴天、陰天、雨天的機率各為 0.4、0.4、0.2。

III. 今日若雨天，則明日為晴天、陰天、雨天的機率各為 0.3、0.5、0.2。

若已知今日為陰天，試求兩天後天氣為晴、陰、雨天之機率為何？

解：

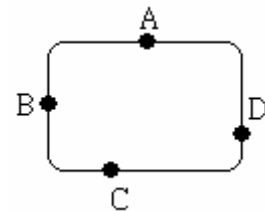
$$\text{令 } A = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.4 & 0.3 \\ 0.4 & 0.4 & 0.5 \\ 0.1 & 0.2 & 0.2 \end{bmatrix}, \text{ 則}$$

$$P^{(1)} = AP^{(0)} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.4 & 0.3 \\ 0.4 & 0.4 & 0.5 \\ 0.1 & 0.2 & 0.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.4 \\ 0.2 \end{bmatrix}$$

$$P^{(2)} = AP^{(1)} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.4 & 0.3 \\ 0.4 & 0.4 & 0.5 \\ 0.1 & 0.2 & 0.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.4 \\ 0.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.42 \\ 0.42 \\ 0.16 \end{bmatrix}$$

故兩天後天氣為晴、陰、雨天之機率為 0.42，0.42 及 0.16

2. 有一人流浪於 A,B,C,D 四地間，如圖，假設每日清晨此人決定當日夜晚繼續留宿該地，或改而前往相鄰任一地的機率皆為 $\frac{1}{3}$ 。若此人今晚夜宿 A 地，試求後天晚上此



人宿於 A,B,C,D 四地之機率各為何？ $(\frac{3}{9}, \frac{2}{9}, \frac{2}{9}, \frac{2}{9})$

3. 有一學生，他有固定的讀書習慣，如下：若他今晚讀書，則明晚也讀書的機率為 30%；若他今晚不讀書，則明晚也不讀書的機率為 60%。

(1) 試寫出轉移矩陣。 $(\begin{bmatrix} 0.3 & 0.4 \\ 0.7 & 0.6 \end{bmatrix})$

(2) 若已知本週一晚上他讀書，則本週三也讀書的機率為何？(0.37)

4. 某城市市中心與市郊人口流動情形如下：

I. 若今年住市中心，則明年會搬到市郊者為 10%，其餘不變動。

II. 若今年住市郊，則明年會搬到市中心者為 5%，其餘不變動。

(1) 試寫出轉移矩陣。 $(\begin{bmatrix} 0.9 & 0.05 \\ 0.1 & 0.95 \end{bmatrix})$

(2) 試求四年後從市中心搬到市郊者，其機率為何？(0.3187)

(3) 若今年此城市市中心有 30 萬人，市郊有 42 萬人。則三年後市中心人口數有多少萬人？（假設出生與死亡達到平衡）(27.7)

5. 某城市市中心與市郊人口流動情形如下：

I. 若今年住市中心，則明年會搬到市郊者為 10%，其餘不變動。

II. 若今年住市郊，則明年會搬到市中心者為 50%，其餘不變動。

(1) 試寫出轉移矩陣。 $\begin{pmatrix} 0.9 & 0.5 \\ 0.1 & 0.5 \end{pmatrix}$

(2) 試求四年後從市中心搬到市郊者，其機率為何？(0.812)

(3) 若今年此城市市中心有 200 萬人，市郊有 40 萬人。則四年後市中心與市郊人口數為何？（假設出生與死亡達到平衡）(200 萬人，40 萬人)

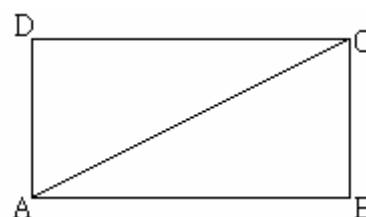
(4) 承上，則六年後市中心與市郊人口數為何？(200 萬人，40 萬人)

6. 有 A 與 B 兩種細菌互相突變，每一分鐘，A 突變為 B 的機率為 0.3，B 突變為 A 的機率為 0.9，而未突變的仍是原來的細菌。現在有 A 細菌 300 萬個，B 細菌 500 萬個，試求 3 分鐘後 A 與 B 細菌各有幾個？（A 有 602.4 萬個，B 有 197.6 萬個）

7. 如圖，四個城市間的交通路線圖。

(1) 試寫出轉移矩陣。

(2) 從 C 出發，共走 5 路段而到達 A，總共有幾條路線？



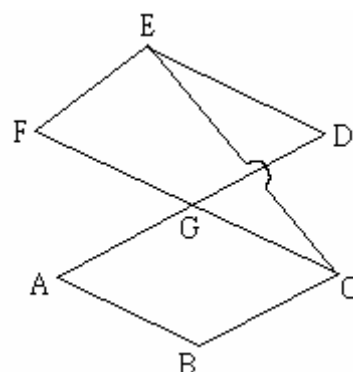
8. 假設甲城市每年有 3% 的人口移居乙城市，而乙城市每年有 2% 的人口移居甲城市。若已知此二城市 n 年後人口數無增減（即已達穩定），試求 n 及 n 年後甲乙兩地人口比例？（假設無移居其他成是者）(? , 2:3)

9. 某市鎮有發行甲乙兩種報紙，目前甲報佔訂報人數的 70%，乙報佔 30%，且已知若訂報人數不變，訂甲報的人續訂甲報的比例佔 80%，轉訂乙報者佔 20%；訂乙報的人續訂乙報的比例佔 60%，轉訂甲報者佔 40%。試求後年甲乙兩種報紙佔訂報人數的比例各為何？（甲佔 0.672，乙佔 0.328，18 年後維持穩定）

10. 如圖，七個城市間的交通路線圖。

(1) 試寫出轉移矩陣。

(2) 從 C 出發，共走 3 路段而到達 G，總共有幾條路線？



11. 如圖，十個城市間的交通路線圖。

(1) 試寫出轉移矩陣。

(2) 用矩陣表示 A、B、F、G 間恰經

F G

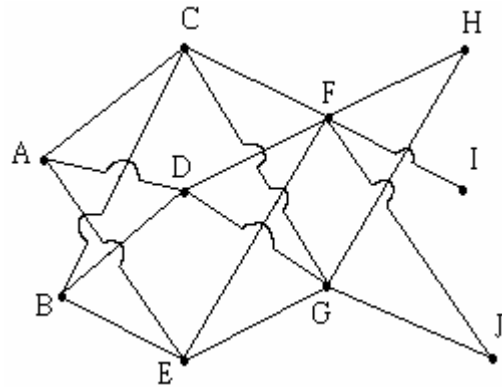
過二路段之相異路線數？

$$\begin{pmatrix} A & \begin{bmatrix} 3 & 3 \end{bmatrix} \\ B & \begin{bmatrix} 3 & 3 \end{bmatrix} \end{pmatrix}$$

(3) 用矩陣表示 A、B、H、I、J 間恰經過三路段之相異路線數？

H I J

$$\begin{pmatrix} A & \begin{bmatrix} 6 & 3 & 6 \end{bmatrix} \\ B & \begin{bmatrix} 6 & 3 & 6 \end{bmatrix} \end{pmatrix}$$



12. 某銀行固定每月十日調查其貸款客戶還款的情形，並做成紀錄予以評定等級，等級如下：

A 級：按期還款。

B 級：延遲一週內還款。

C 級：延遲一週以上才還款。

根據歷史資料顯示，若本月評定為 A 級者，在下一個月仍評定為 A 級者佔 80%，而有 10% 轉移到 B 級，10% 轉移到 C 級。若本月評定為 B 級者，在下一個月仍評定為 B 級者佔 70%，而有 20% 轉移到 A 級，10% 轉移到 C 級。若本月評定為 C 級者，在下一個月仍評定為 C 級者佔 60%，而有 15% 轉移到 A 級，25% 轉移到 B 級。假設今年七月十日調查結果，貸款客戶中有 A 級者 60%，B 級者 30%，C 級者 10%，

(1) 試寫出轉移矩陣。

$$\begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 & 0.15 \\ 0.1 & 0.7 & 0.25 \\ 0.1 & 0.1 & 0.6 \end{bmatrix} \end{pmatrix}$$

(2) 試預測九月十日之調查結果 A、B、C 級者各佔多少%？（A 佔 52.55、B 佔 29.95、C 佔 17.5）