

點線面之關係

一、 點到平面的關係

1. $P(x_0, y_0, z_0)$ 點到平面 $E: ax + by + cz + d = 0$ 的距離為 $\frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

例 1：試求點 $P(2,2,4)$ 到平面 $E: 4x + y + 8z + 39 = 0$ 的距離？(9)

例 2：試求點 $P(1,3,5)$ 到平面 $E: 2x - 3y + 4z - 8 = 0$ 的距離？

2. $P(x_0, y_0, z_0)$ 點到平面 $E: ax + by + cz + d = 0$ 的投影點座標為

$$\begin{aligned} P - \frac{E_p}{|\vec{n}|} \times \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} \\ = (x_0, y_0, z_0) - \frac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{a^2 + b^2 + c^2} \times (a, b, c) \end{aligned}$$

例 3：試求 $(3,1,-2)$ 對於 $2x + y - 2z + 7 = 0$ 之投影點座標？ $(-1, -1, 2)$

3. $P(x_0, y_0, z_0)$ 點到平面 $E: ax + by + cz + d = 0$ 的對稱點座標為

2 (投影點座標) - P

$$= 2 \left((x_0, y_0, z_0) - \frac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{a^2 + b^2 + c^2} \times (a, b, c) \right) - (x_0, y_0, z_0)$$

例 4：試求 $(3,1,-2)$ 對於 $2x + y - 2z + 7 = 0$ 之對稱點座標？ $(-5, -3, 6)$

二、 兩平面的交角平分面方程式

兩平面 $\begin{cases} E_1: a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ E_2: a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$ 的交角平分面方程式為

$$\frac{|a_1x + b_1y + c_1z + d_1|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}} = \frac{|a_2x + b_2y + c_2z + d_2|}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$$

三、 點到直線的關係

令 $A(x_1, y_1, z_1)$, $\vec{L} = (a, b, c)$

$$1. P(x_0, y_0, z_0) \text{ 點到直線 } \frac{x-x_1}{a} = \frac{y-y_1}{b} = \frac{z-z_1}{c} \text{ 的距離為 } \sqrt{|\vec{AP}|^2 - \left(\vec{AP} \cdot \frac{\vec{L}}{|\vec{L}|}\right)^2} =$$

$$\sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2 + (z_0 - z_1)^2 - \left[(x_0 - x_1, y_0 - y_1, z_0 - z_1) \cdot \frac{(a, b, c)}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}\right]^2}$$

例 5：試求 $(2, -3, 1)$ 對於 $\frac{x+2}{5} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+5}{4}$ 的距離？ ($\sqrt{14}$)

$$2. P(x_0, y_0, z_0) \text{ 點到直線 } \frac{x-x_1}{a} = \frac{y-y_1}{b} = \frac{z-z_1}{c} \text{ 的投影點座標為 } A + \frac{\vec{AP} \cdot \vec{L}}{|\vec{L}|} \times \frac{\vec{L}}{|\vec{L}|}$$

$$= (x_1, y_1, z_1) + [(x_0 - x_1, y_0 - y_1, z_0 - z_1) \cdot \frac{(a, b, c)}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}] \times \frac{(a, b, c)}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

例 6：試求 $(2, -3, 1)$ 對於 $\frac{x+2}{5} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+5}{4}$ 的投影點座標？ ($3, 0, -1$)

3. $P(x_0, y_0, z_0)$ 點到直線 $\frac{x-x_1}{a} = \frac{y-y_1}{b} = \frac{z-z_1}{c}$ 的對稱點座標為

2 (投影點座標) - P =

$$2\left\{ (x_1, y_1, z_1) + [(x_0 - x_1, y_0 - y_1, z_0 - z_1) \cdot \frac{(a, b, c)}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}] \times \frac{(a, b, c)}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right\} - (x_0, y_0, z_0)$$

例 7：試求 $(2, -3, 1)$ 對於 $\frac{x+2}{5} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+5}{4}$ 的對稱點座標？ ($4, 3, -3$)

四、 兩歪斜線之距離

令 $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $\vec{L}_1 = (a_1, b_1, c_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$, $\vec{L}_2 = (a_2, b_2, c_2)$

$$\text{兩歪斜線 } \frac{x-x_1}{a_1} = \frac{y-y_1}{b_1} = \frac{z-z_1}{c_1} \text{ 與 } \frac{x-x_2}{a_2} = \frac{y-y_2}{b_2} = \frac{z-z_2}{c_2} \text{ 之距離為 } \left| \frac{\vec{A}_1 \vec{A}_2 \cdot \vec{L}_1 \times \vec{L}_2}{|\vec{L}_1 \times \vec{L}_2|} \right|$$