# 點線面之關係（補充資料）

## 一、　點到平面的關係

1. $P(x_0,y_0,z_0)$點到平面$E:ax+by+cz+d=0$的距離為$\dfrac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

例 1：試求點$P(2,2,4)$到平面$E:4x+y+8z+39=0$的距離？(9)

例 2：試求點$P(1,3,5)$到平面$E:2x-3y+4z-8=0$的距離？

2. $P(x_0,y_0,z_0)$點到平面$E:ax+by+cz+d=0$的投影點座標為

$P-\dfrac{E_p}{|\vec{n}|}\times\dfrac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$

$=(x_0,y_0,z_0)-\dfrac{ax_0+by_0+cz_0+d}{a^2+b^2+c^2}\times(a,b,c)$

例 3：試求$(3,1,-2)$對於$2x+y-2z+7=0$之投影點座標？（$-1,-1,2$）

3. $P(x_0,y_0,z_0)$點到平面$E:ax+by+cz+d=0$的對稱點座標為

2（投影點座標）-P

$=2$（$(x_0,y_0,z_0)-\dfrac{ax_0+by_0+cz_0+d}{a^2+b^2+c^2}\times(a,b,c)$）-$(x_0,y_0,z_0)$

例 4：試求$(3,1,-2)$對於$2x+y-2z+7=0$之對稱點座標？（$-5,-3,6$）

## 二、　兩平面的交角平分面方程式

兩平面$\begin{cases}E_1:a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0\\E_2:a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0\end{cases}$的交角平分面方程式為

$$\frac{|a_1x+b_1y+c_1z+d_1|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}}=\frac{|a_2x+b_2y+c_2z+d_2|}{\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}$$

## 三、　點到直線的關係

令$A(x_1,y_1,z_1)$，$\vec{L}=(a,b,c)$

1. $P(x_0,y_0,z_0)$點到直線$\dfrac{x-x_1}{a}=\dfrac{y-y_1}{b}=\dfrac{z-z_1}{c}$的距離為$\sqrt{|\overrightarrow{AP}|^2-(\overrightarrow{AP}\cdot\dfrac{\vec{L}}{|\vec{L}|})^2}$ ＝

$$\sqrt{(x_0-x_1)^2+(y_0-y_1)^2+(z_0-z_1)^2-[(x_0-x_1,y_0-y_1,z_0-z_1)\cdot\frac{(a,b,c)}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}]^2}$$

例 5：試求$(2,-3,1)$對於$\dfrac{x+2}{5}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z+5}{4}$的距離？（$\sqrt{14}$）

2. $P(x_0,y_0,z_0)$點到直線$\dfrac{x-x_1}{a}=\dfrac{y-y_1}{b}=\dfrac{z-z_1}{c}$的投影點座標為$A+(\overrightarrow{AP}\cdot\dfrac{\vec{L}}{|\vec{L}|})\times\dfrac{\vec{L}}{|\vec{L}|}$

$=(x_1,y_1,z_1)+[(x_0-x_1,y_0-y_1,z_0-z_1)\cdot\dfrac{(a,b,c)}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}]\times\dfrac{(a,b,c)}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

例 6：試求$(2,-3,1)$對於$\dfrac{x+2}{5}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z+5}{4}$的投影點座標？（$3,0,-1$）

3.　$P(x_0, y_0, z_0)$點到直線$\frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b}=\frac{z-z_1}{c}$的對稱點座標為

2（投影點座標）-P＝

$2\{(x_1, y_1, z_1)+[(x_0-x_1, y_0-y_1, z_0-z_1)\cdot\frac{(a,b,c)}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}]\times\frac{(a,b,c)}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\}$-$(x_0, y_0, z_0)$

**例 7：試求**$(2,-3,1)$**對於**$\frac{x+2}{5}=\frac{y+1}{1}=\frac{z+5}{4}$**的對稱點座標？（**$4,3,-3$**）**

## 四、　兩歪斜線之距離

**令**$A_1(x_1, y_1, z_1)$**，**$\vec{L}_1=(a_1, b_1, c_1)$**，**$A_2(x_2, y_2, z_2)$**，**$\vec{L}_2=(a_2, b_2, c_2)$

**兩歪斜線**$\frac{x-x_1}{a_1}=\frac{y-y_1}{b_1}=\frac{z-z_1}{c_1}$**與**$\frac{x-x_2}{a_2}=\frac{y-y_2}{b_2}=\frac{z-z_2}{c_2}$**之距離為**$\left|\overrightarrow{A_1A_2}\cdot\frac{\vec{L}_1\times\vec{L}_2}{\left|\vec{L}_1\times\vec{L}_2\right|}\right|$