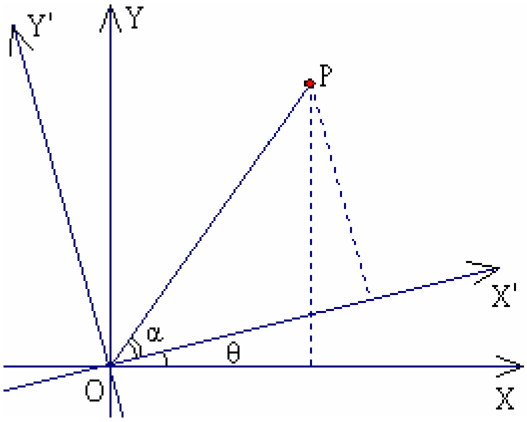
閱讀測驗

旋轉



如圖，將座標軸順時針旋轉 θ 度，產生一新的座標系 X'－Y'，若一 P 點在原座標系中之座標為(x,y)，在新的座標系中之座標為(x',y')，則

$$\begin{cases} x=\cos(\theta+\alpha)=\cos\theta\cos\alpha-\sin\theta\sin\alpha \\ y=\sin(\theta+\alpha)=\sin\theta\sin\alpha+\cos\theta\cos\alpha \end{cases} \text{且} \begin{cases} x'=\cos\alpha \\ y'=\sin\alpha \end{cases}$$

故$\begin{cases} x=x'\cos\theta-y'\sin\theta \\ y=x'\sin\theta+y'\cos\theta \end{cases}$或$\begin{cases} x'=x\cos\theta+y\sin\theta \\ y'=-x\sin\theta+y\cos\theta \end{cases}$

亦可表為$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$或$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

故可得新舊座標系之變換關係式

舊座標系中點(x,y)經旋轉矩陣$\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$變換後，即可得新座標系中之座標點。

新座標系中點(x,y)經旋轉矩陣$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$變換後，即可得舊座標系中之座標點。

例 1：將座標軸順時針旋轉 30 度，則

(1) 點(2,5)在座標軸旋轉後，新的座標為何？

(2) 若新座標點為(4,-2)，則其原座標為何？

(3) 原座標系中方程式$y^2=4x$經旋轉後，新方程式為何？

(4) 若新方程式為$3x-4y=5$，則其原方程式為何？

解：(1)$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos 30^\circ & \sin 30^\circ \\ -\sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{5}{2}+\sqrt{3} \\ -1+\frac{5\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$

故新座標為$(\frac{5}{2}+\sqrt{3},-1+\frac{5\sqrt{3}}{2})$

$$(2)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos 30^\circ & -\sin 30^\circ \\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1+2\sqrt{3} \\ 2-\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

故舊座標爲$(1+2\sqrt{3},2-\sqrt{3})$

$$(3)\begin{cases} x=x'\cos 30^\circ-y'\sin 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}x'-\frac{1}{2}y' \\ y=x'\sin 30^\circ+y'\cos 30^\circ=\frac{1}{2}x'+\frac{\sqrt{3}}{2}y' \end{cases}$$ 代入 $y^2=4x$ ，得

$(\frac{1}{2}x'+\frac{\sqrt{3}}{2}y')^2=4(\frac{\sqrt{3}}{2}x'-\frac{1}{2}y')$ ，化簡得 $x'^2+2\sqrt{3}x'y'+3y'^2-8\sqrt{3}x'+8y'=0$

$$(4)\begin{cases} x'=x\cos 30^\circ+y\sin 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}y \\ y'=-x\sin 30^\circ+y\cos 30^\circ=-\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y \end{cases}$$ 代入 $3x-4y=5$ 得

$3(\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}y)-4(-\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y)=5$ 化簡得 $(3\sqrt{3}+4)x+(3-4\sqrt{3})y-10=0$