



如圖，將座標軸順時針旋轉 θ 度，產生一新的座標系 $X'-Y'$ ，若一 P 點在原座標系中之座標為 (x, y) ，在新的座標系中之座標為 (x', y') ，則

$$\begin{cases} x = \cos(\theta + \alpha) = \cos \theta \cos \alpha - \sin \theta \sin \alpha \\ y = \sin(\theta + \alpha) = \sin \theta \sin \alpha + \cos \theta \cos \alpha \end{cases} \quad \text{且} \quad \begin{cases} x' = \cos \alpha \\ y' = \sin \alpha \end{cases}$$

$$\text{故} \begin{cases} x = x' \cos \theta - y' \sin \theta \\ y = x' \sin \theta + y' \cos \theta \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x' = x \cos \theta + y \sin \theta \\ y' = -x \sin \theta + y \cos \theta \end{cases}$$

$$\text{亦可表為} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \quad \text{或} \quad \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

故可得新舊座標系之變換關係式

舊座標系中點 (x, y) 經旋轉矩陣 $\begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$ 變換後，即可得新座標系中之座標點。

新座標系中點 (x, y) 經旋轉矩陣 $\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$ 變換後，即可得舊座標系中之座標點。

例 1：將座標軸順時針旋轉 30° 度，則

- (1) 點 $(2, 5)$ 在座標軸旋轉後，新的座標為何？
- (2) 若新座標點為 $(4, -2)$ ，則其原座標為何？
- (3) 原座標系中方程式 $y^2 = 4x$ 經旋轉後，新方程式為何？
- (4) 若新方程式為 $3x - 4y = 5$ ，則其原方程式為何？

$$\text{解：(1)} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 30^\circ & \sin 30^\circ \\ -\sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} + \sqrt{3} \\ -1 + \frac{5\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

$$\text{故新座標為} \left(\frac{5}{2} + \sqrt{3}, -1 + \frac{5\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$(2) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 30^\circ & -\sin 30^\circ \\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+2\sqrt{3} \\ 2-\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

故舊座標為 $(1+2\sqrt{3}, 2-\sqrt{3})$

$$(3) \begin{cases} x = x' \cos 30^\circ - y' \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} x' - \frac{1}{2} y' \\ y = x' \sin 30^\circ + y' \cos 30^\circ = \frac{1}{2} x' + \frac{\sqrt{3}}{2} y' \end{cases} \text{ 代入 } y^2 = 4x \text{ , 得}$$

$$\left(\frac{1}{2} x' + \frac{\sqrt{3}}{2} y'\right)^2 = 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2} x' - \frac{1}{2} y'\right) \text{ , 化簡得 } x'^2 + 2\sqrt{3} x' y' + 3y'^2 - 8\sqrt{3} x' + 8y' = 0$$

$$(4) \begin{cases} x' = x \cos 30^\circ + y \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} x + \frac{1}{2} y \\ y' = -x \sin 30^\circ + y \cos 30^\circ = -\frac{1}{2} x + \frac{\sqrt{3}}{2} y \end{cases} \text{ 代入 } 3x - 4y = 5 \text{ 得}$$

$$3\left(\frac{\sqrt{3}}{2} x + \frac{1}{2} y\right) - 4\left(-\frac{1}{2} x + \frac{\sqrt{3}}{2} y\right) = 5 \text{ 化簡得 } (3\sqrt{3} + 4)x + (3 - 4\sqrt{3})y - 10 = 0$$